⑤ Comment étudier les variations d'une fonction contenant un logarithme ?

Dressez le tableau de variations des fonctions

$$a)\ f(x) = 3x - 1 - 5\ln(x)$$

$$b)\ g(x) = 4x^2 - 22x + 15 + 12\ln(x)$$

Etape 1 : Je dérive la fonction

$$f(x) = 3x - 1 - 5 \times \ln(x)$$

$$f'(x) = 3 \times 1 - 5 \times \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = 3 - \frac{5}{x}$$

$$f'(x) = \frac{3x - 5}{x}$$

$$g(x) = 4x^2 - 22x + 15 + 12 \times \ln(x)$$

$$g'(x) = 4 \times 2x - 22 \times 1 + 12 \times \frac{1}{x}$$

$$g'(x) = 8x - 22 + \frac{12}{x}$$

$$g'(x) = \frac{8x^2 - 22x + 12}{x}$$

Etape 2 : J'étudie le signe de la dérivée :

$$f'(x) = \frac{3x - 5}{x} > 0$$

$$3x - 5 > 0 \quad \text{car} \quad x > 0$$

$$3x > 5$$

$$x > \frac{5}{3}$$

$$g'(x) = \frac{8x^2 - 22x + 12}{x} > 0$$

$$8x^2 - 22x + 12 > 0 \quad \text{car} \quad x > 0$$

$$\Delta = 22^2 - 4 \times 8 \times 12 = 100 > 0$$

$$x_1 = \frac{22 - \sqrt{100}}{16} = \frac{3}{4}$$

$$x_2 = \frac{22 + \sqrt{100}}{16} = 2$$

De plus $a = 8 > 0$ donc la parabole est tournée vers le haut

Etape 3 : Je dresse le tableau de variations

x	0		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$1{,}45$	↗	

x	0		$\frac{3}{4}$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↗	$-2{,}7$	↘	$-4{,}7$	↗	

$\boldsymbol{f\left(\frac{5}{3}\right) = 4 - 5\ln\left(\frac{5}{3}\right) \approx 1{,}45}$

$\boldsymbol{g\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{4} - \frac{66}{4} + 15 + 12\ln\left(\frac{3}{4}\right) \approx -2{,}7}$

$\boldsymbol{g(2) = -13 + 12\ln(2) \approx -4{,}7}$

Etape 4 : Je m'exerce :

Dressez le tableau de variations des fonctions :

$a)\ f(x) = 5x + 2\ln(x) - 1$

$b)\ g(x) = 2 - 4x^2 + 6x + 2\ln(x)$

$c)\ h(x) = 4 - 2x + 5\ln(x)$

$d)\ k(x) = -2x^2 + 18x - 17 - 14\ln(x)$

$e)\ u(x) = 2 - 3x - 7\ln(x)$

$f)\ v(x) = 3x^2 + 18x - 24\ln(x) - 25$

Etape 5 : Je me corrige :

Lien vers les corrections

Correction des exercices :

$a)\ \boldsymbol{f(x) = 5x + 2\ln(x) - 1}$

$$f(x) = 5x + 2\ln(x) - 1$$

$$f'(x) = 5 \times 1 + 2 \times \frac{1}{x}$$

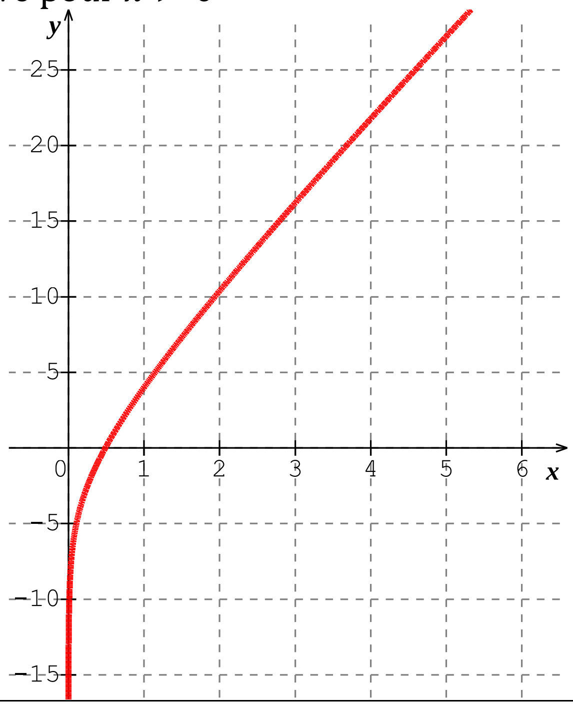
$$f'(x) = 5 + \frac{2}{x}$$

$$f'(x) = \frac{5x + 2}{x}$$

$$f'(x) > 0$$
$$5x + 2 > 0$$
$$5x > -2$$
$$x > -0{,}4$$

La dérivée sera donc toujours positive pour $x > 0$

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$



$b)\ \boldsymbol{g(x) = 2 - 4x^2 + 6x + 2\ln(x)}$

$$g(x) = 2 - 4x^2 + 6x + 2\ln(x)$$

$$g'(x) = -4 \times 2x + 6 \times 1 + 2 \times \frac{1}{x}$$

$$g'(x) = -8x + 6 + \frac{2}{x}$$

$$g'(x) = \frac{-8x^2 + 6x + 2}{x}$$

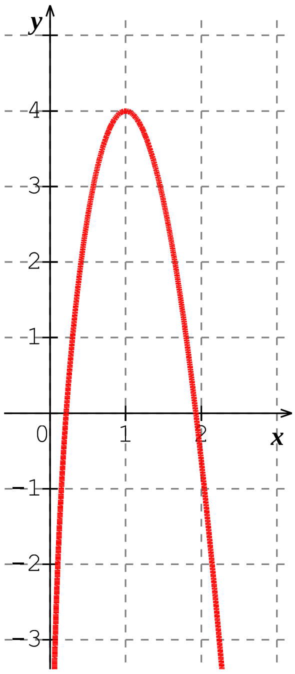
$$g'(x) > 0$$
$$-8x^2 + 6x + 2 > 0$$

$$\Delta = 6^2 - 4 \times (-8) \times 2 = 100 > 0$$

$$x_1 = \frac{-6 - \sqrt{100}}{-16} = 1$$
$$x_2 = \frac{-6 + \sqrt{100}}{-16} = -\frac{1}{4}$$

De plus $a = -8 < 0$ donc la parabole est tournée vers le bas

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$	4	$\searrow$	



$$g(1) = 4$$

c) $\boldsymbol{h(x) = 4 - 2x + 5\ln(x)}$

$$h(x) = 4 - 2x + 5\ln(x)$$

$$h'(x) = -2 \times 1 + 5 \times \frac{1}{x}$$

$$h'(x) = -2 + \frac{5}{x}$$

$$h'(x) = \frac{-2x + 5}{x}$$

$$h'(x) > 0$$

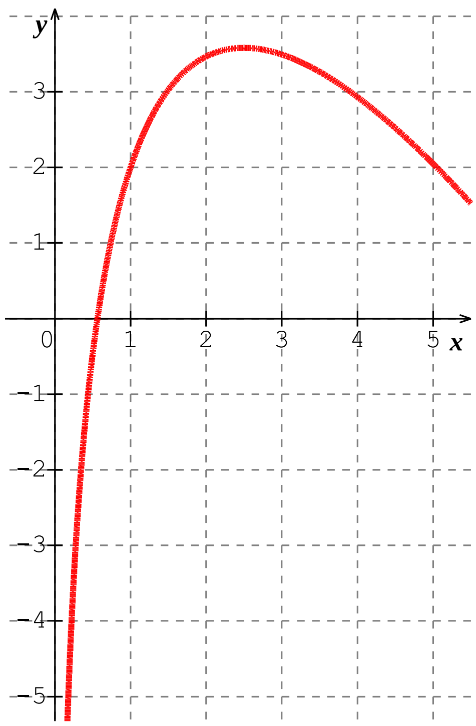
$$-2x + 5 > 0$$

$$-2x > -5$$

$$x < \frac{-5}{-2}$$

$$x < 2{,}5$$

x	0		$2{,}5$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$	$3{,}6$	$\searrow$	



$$\boldsymbol{h(2,5) = -1 + 5\ln(2,5) \approx 3,6}$$

$$\boldsymbol{d)\ k(x) = -2x^2 + 18x - 17 - 14\ln(x)}$$

$$k(x) = -2x^2 + 18x - 17 - 14\ln(x)$$

$$k'(x) = -2 \times 2x + 18 \times 1 - 14 \times \frac{1}{x}$$

$$k'(x) = -4x + 18 - \frac{14}{x}$$

$$k'(x) = \frac{-4x^2 + 18x - 14}{x}$$

$$k'(x) > 0$$

$$-4x^2 + 18x - 14 > 0$$

$$\Delta = 18^2 - 4 \times (-4) \times (-14) = 100 > 0$$

$$x_1 = \frac{-18 - \sqrt{100}}{-8} = 3{,}5$$

$$x_2 = \frac{-18 + \sqrt{100}}{-8} = 1$$

De plus $a = -4 < 0$ donc la parabole est tournée vers le bas 

x	0		1		$3{,}5$		$+\infty$
$k'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$k(x)$		$\searrow$	-1	$\nearrow$	$3{,}96$	$\searrow$	

$$k(1) = -1$$

$$k(3{,}5) = 21{,}5 - 14\ln(3{,}5) \approx 3{,}96$$

$$\boldsymbol{e)\ \ u(x) = 2 - 3x - 7\ln(x)}$$

$$u(x) = 2 - 3x - 7\ln(x)$$

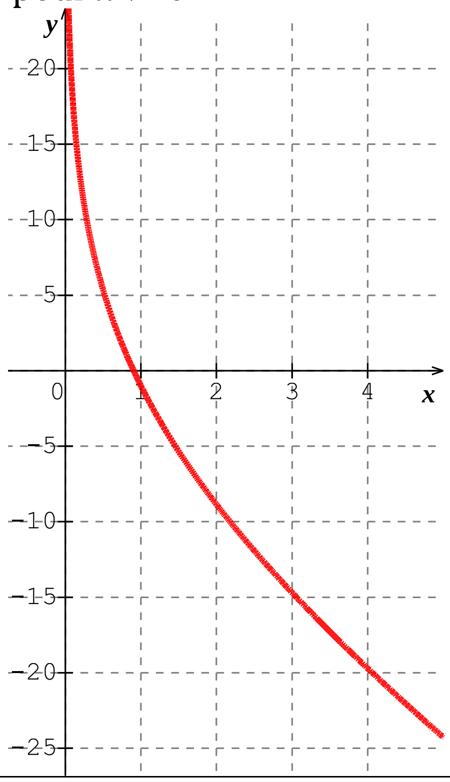
$$u'(x) = -3 \times 1 - 7 \times \frac{1}{x}$$

$$u'(x) = -3 - \frac{7}{x}$$

$$u'(x) = \frac{-3x - 7}{x}$$

$$u'(x) > 0$$
$$-3x - 7 > 0$$
$$-3x > 7$$
$$x < \frac{7}{-3}$$

La dérivée sera donc toujours négative pour $x > 0$



x	$0 \qquad +\infty$
$u'(x)$	$-$
$u(x)$	$\searrow$

$$\boldsymbol{f)\ v(x) = 3x^2 + 18x - 24\ln(x) - 25}$$

$$v(x) = 3x^2 + 18x - 24\ln(x) - 25$$

$$v'(x) = 3 \times 2x + 18 \times 1 - 24 \times \frac{1}{x}$$

$$v'(x) = 6x + 18 - \frac{24}{x}$$

$$v'(x) = \frac{6x^2 + 18x - 24}{x}$$

$$v'(x) > 0$$

$$6x^2 + 18x - 24 > 0$$

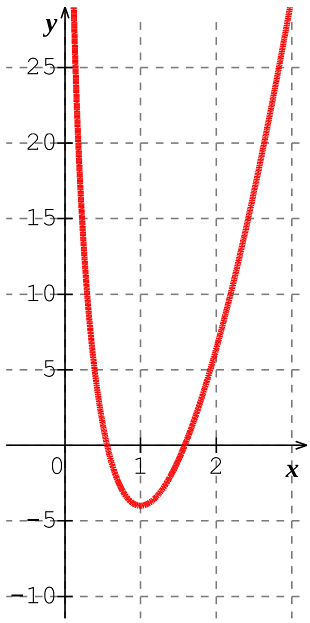
$$\Delta = 18^2 - 4 \times (-24) \times 6 = 900 > 0$$

$$x_1 = \frac{-18 - \sqrt{900}}{12} = -4$$

$$x_2 = \frac{-18 + \sqrt{900}}{12} = 1$$

De plus $a = 6 > 0$ donc la parabole est tournée vers le haut

x	0		1		$+\infty$
$v'(x)$		$-$	0	$+$	
$v(x)$		$\searrow$	-4	$\nearrow$	



$$v(1) = -4$$