Histoire :

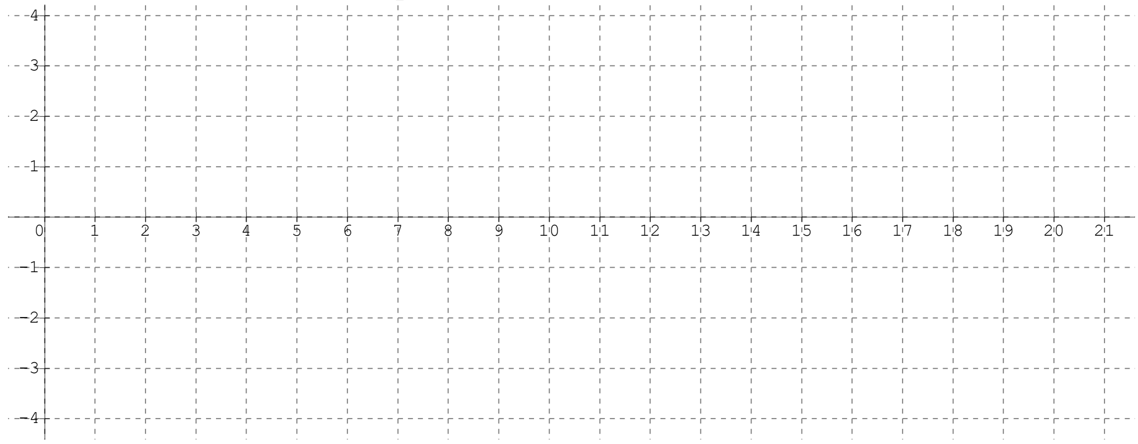
« L'invention des logarithmes, en réduisant le temps passé aux calculs de quelques mois à quelques jours, double pour ainsi dire la vie des astronomes » (Pierre-Simon de Laplace)
À la fin du XVIe siècle, les grands voyages maritimes et la découverte des lois planétaires (Copernic, Kepler...) rendent les calculs astronomiques complexes et longs.
Pour les simplifier, on crée des tables à deux colonnes où la multiplication de deux nombres devient une addition. La première table de ce type est publiée par l'Ecossais **John Neper** en 1614, après quarante ans de travail ! En voici un extrait (ci-contre).

0,1	
0,5	
1	
1,5	
2	0,69315
3	1,09861
4	1,38629
5	1,60944
6	1,79176
7	1,94591
8	2,07944
9	2,19722
10	2,30259
11	2,39790
12	2,48491
13	2,56495
14	2,63906
15	2,70805
16	2,77259
17	2,83321
18	2,89037
19	2,94444
20	2,99573
21	
22	
100	
	1

►1. Vérifier sur quelques exemples la propriété annoncée. Quel nombre doit-on écrire en face de 1 ? Quel nombre doit-on écrire en face de 21 ? de 22 ?
►2. Quand on divise deux nombres de la colonne de gauche, que peut-on dire de ceux de la colonne de droite ? En déduire les nombres à écrire en face de : 1,5; 0,5; 0,1.
►3. Quand on élève un nombre au carré, que peut-on dire de son logarithme ? En déduire le logarithme de 100.
►5. Quand on prend la racine carrée d'un nombre, que peut-on dire de son logarithme ? En déduire le logarithme de $\sqrt{5}$.

Cette table transforme les multiplications en additions, les divisions en soustractions, et les racines carrées en divisions par 2. En 1617, Briggs, disciple de Neper, publie une version améliorée pour les calculs : les logarithmes décimaux.

►6. Pour tout x dans la colonne de gauche, on note $\ln(x)$ son logarithme dit népérien dans la colonne de droite. Traduire les propriétés des questions précédentes en formules.
►7. Dans le repère ci-dessous, placer les points du tableau ci-contre et tracer la courbe. Quelle est l'abscisse du point de la courbe d'ordonnée 1 ?



Ce qu'il faut retenir :

1 Le logarithme népérien (ln), est la primitive de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur $]0,+\infty[$ telle que $\ln(1) = 0$

$$\text{ce qui signifie que } (\ln(x))' = \frac{1}{x} \qquad \text{et} \qquad (\ln(u))' = \frac{u'}{u}$$

2 Pour tous réels a et b tels que $a > 0$, $b > 0$ et pour tout entier relatif n.

$$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b) \qquad \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a) \qquad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

$$\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a) \qquad \ln(a^n) = n\ln(a) \qquad \text{et} \qquad \ln(e) = 1 \text{ où } e \approx 2,718$$

Exercice 1. PISTE BLEUE

Ecrire en fonction de $\ln(3)$: $\ln(3e)$ $\quad \ln(81)$ $\quad \ln(\sqrt{27})$ $\quad \ln\left(\frac{1}{9}\right)$ $\quad \ln\left(\frac{e}{\sqrt{3}}\right)$

Exercice n°2. PISTE BLEUE

Ecrire en fonction de $\ln(x)$ où $x > 0$: $\ln(x^5)$ $\quad \ln\left(\frac{1}{x^3}\right)$ $\quad \ln\left(\sqrt{x^7}\right)$ $\quad \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^3}}\right)$ $\quad \ln(e \times x^{12})$

Exercice n°3. PISTE BLEUE

Soit la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 3x + 4 - 5\ln(x)$

▶1. Pour tout $x \in]0;+\infty[$, calculer $f'(x)$ puis étudier le signe de $f'(x)$.

▶2. En déduire le tableau de variations de la fonction f.

Exercice n°4. PISTE BLEUE

Soit la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 2x - 5 + 3\ln(x)$

▶1. Pour tout $x \in]0;+\infty[$, calculer $f'(x)$ puis étudier le signe de $f'(x)$.

▶2. En déduire le tableau de variations de la fonction f.

Exercice n°5. PISTE BLEUE

Soit la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = -8x^2 + 14x + 1 - 3\ln(x)$

▶1. Pour tout $x \in]0;+\infty[$, calculer $g'(x)$ puis étudier le signe de $g'(x)$.

▶2. En déduire le tableau de variations de la fonction g.

Exercice n°6. PISTE BLEUE

Soit la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = -x^2 + 6x - 5 + 8\ln(x)$

▶1. Pour tout $x \in]0;+\infty[$, calculer $g'(x)$ puis étudier le signe de $g'(x)$.

▶2. En déduire le tableau de variations de la fonction g.

Exercice n°7. PISTE ROUGE

Dans un tunnel de congélation, la température T en degré K d'une denrée diminue de 2% de sa valeur, toutes les minutes. A l'entrée du tunnel, pour $t = 0$, $T = 293\ K$ (soit 20°C). On note $T(t)$ la température exprimée en K, à l'instant t exprimé en minutes.

▶1. Montrer que $T(t) = 293 \times 0{,}98^t$.

▶2. En déduire que $t(T) = \dfrac{\ln(T) - \ln(293)}{\ln(0{,}98)}$.

▶3. Calculer $t'(T)$ pour tout $T \in [240; 293]$.

▶4. En déduire le sens de variation de cette fonction sur cet intervalle.

▶5. Déterminer la température atteinte après 480 secondes.

Exercice n°8. PISTE ROUGE

Résoudre les équations :

$2^n = 4\,294\,967\,296$ $\qquad 7^x = 3 \times 10^9$ $\quad$ et $\quad e^x = 12045$

Exercice n°9. PISTE ROUGE

Déterminer le maximum de la fonction $h(x) = \ln(2x + 1) - 3x$ définie sur $]0;+\infty[$.