Réciproque du logarithme :

On dit que les fonctions exponentielle et logarithme népérien sont réciproques l'une de l'autre.

x							
$\ln(x)$							
x							
$\exp(x) = e^x$							

La fonction $x \longmapsto \ln(x)$ a été tracée dans le repère. Tracer la courbe de la fonction $x \longmapsto e^x$.

Problème :

Afin de vérifier la bonne isolation thermique d'un spa, on porte la température de l'eau, du spa à 38 °C puis on coupe l'alimentation électrique du spa qui sert à chauffer l'eau. On s'intéresse à l'évolution de cette température en fonction du temps écoulé à partir de cette coupure. La température de l'eau du spa est modélisée par une fonction f qui, à tout temps t (en heures) écoulé depuis la coupure de l'alimentation électrique, associe la température $f(t)$, en degré Celsius (°C), de l'eau du spa au temps t.
On admet que, pour tout réel t de l'intervalle $[0; +\infty[$, $f(t) = 13e^{-0{,}05t} + 25$.

▶1. Vérifier que la température est bien de 38°C au moment de la coupure de l'alimentation.
▶2. Calculer la valeur arrondie à 10^{-1} de $f(24)$. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.
▶3. Dresser, en justifiant, le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$. Ce sens de variation paraît-il cohérent avec le contexte de l'exercice ?

Ce qu'il faut retenir :

La fonction exponentielle $x \mapsto e^x$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$: $(e^x)' = e^x$ et $(e^u)' = u'e^u$
Pour tout $a > 0$ et $b > 0$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$e^a \times e^b = e^{a+b} \qquad \frac{e^a}{e^b} = e^{a-b} \qquad \frac{1}{e^b} = e^{-b} \qquad (e^a)^n = e^{na}$$

$$(u \times v)' = u' \times v + u \times v' \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$$

Exercice n°1. PISTE BLEUE

Simplifier l'écriture : $A = e^{1+\sqrt{5}}e^{1-\sqrt{5}}$ $\qquad B = \frac{(e^x)^3}{5\,e^{-x}}$ $\qquad C = \frac{e^{2x}\times(e^x)^5}{e^{3x}}$

Exercice n°2. PISTE BLEUE

Résoudre les équations suivantes :

$a)$ $3\,e^x - 1 = 5$ $\qquad b)$ $4 - 3\ln(x) = 1$ $\qquad c)$ $1 - 4\,e^{2x} = 5$ $\qquad d)$ $2 - 4\ln(x+1) = 6$

Exercice n°3. PISTE BLEUE

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x + 2e^x$

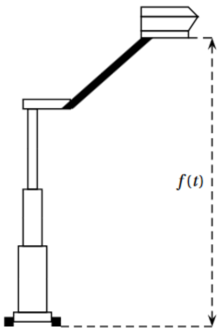
a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $f'(x)$ puis étudier le signe de $f'(x)$.

b) En déduire le tableau de variations de la fonction f.

Exercice n°4. PISTE BLEUE

Une société utilise, dans le cadre de son activité de nettoyage de vitres, une nacelle élévatrice à mât télescopique vertical. On souhaite étudier la durée nécessaire pour que la nacelle atteigne sa hauteur opérationnelle.

On note $f(t)$ la hauteur, en mètre de la nacelle à l'instant t, en seconde. On suppose que, pour tout $t \in [0;+\infty[$, $\quad f(t) = -10\,e^{-0,1\,t} + 12$.



▶1. Déterminer la hauteur de la nacelle au début puis au bout d'une minute.

▶2. Déterminer au bout de combien de temps, la nacelle atteindra la hauteur de 10 mètres.

▶3. Conjecturer le sens de variation de la fonction f. Vérifier mathématiquement votre conjecture.

Exercice n°5. PISTE BLEUE

L'activité d'une source radioactive est la vitesse de désintégration du matériau radioactif la constituant. Elle correspond au nombre d'atomes radioactifs qui se désintègrent par unité de temps :

$$A(t) = -\frac{dN(t)}{dt} = -N'(t)$$

La constante radioactive d'un radioisotope est le rapport entre l'activité d'un échantillon et le nombre d'atomes du radioisotope présents dans l'échantillon $\lambda = \frac{A(t)}{N(t)}$ soit $A(t) = \lambda \times N(t)$.

▶1. On établit que la loi de décroissance radioactive s'écrit $N(t) = N_0\,e^{-\lambda t}$ où N_0 désigne le nombre d'atomes initialement présents. Démontrer que $N'(t) = -\lambda \times N(t)$

▶2. **La période radioactive ou demi-vie *T*** d'un isotope radioactif est le temps nécessaire pour que la moitié des noyaux de cet isotope initialement présents se désintègrent.

Démontrer que $T = \dfrac{\ln(2)}{\lambda}$.

▶3. Sachant que la constante radioactive de ^{238}**U** est $\boldsymbol{\lambda = 4{,}91 \times 10^{-18}\ s^{-1}}$. Déterminer sa période radioactive en années.

Exercice n°6. PISTE ROUGE

Etudier les variations de la fonction définie sur $[-5;+\infty[$ par $g(x) = xe^x$.

Exercice n°7. PISTE ROUGE

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \dfrac{1}{1+2e^x}$.

▶1. Dresser, en justifiant, le tableau de variations de la fonction h.

▶2. Résoudre l'équation $h(x) = \frac{1}{2}$.

Exercice n°8. PISTE ROUGE

Lorsque l'on consomme de l'alcool, le taux d'alcool dans le sang varie en fonction du temps écoulé depuis l'absorption. Ce taux est appelé « alcoolémie » et est mesuré en grammes par litre (g/L). Après l'absorption de trois verres d'alcool, l'alcoolémie d'une personne donnée, en fonction du temps (exprimé en heures), est modélisée par la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(t) = 2{,}4\,t\,e^{-0{,}9t}$.

▶1. Donner la valeur de l'alcoolémie de la personne considérée au bout de 45 minutes.

▶2. Quelle est l'alcoolémie la plus élevée pour la personne considérée ? Justifier votre réponse.

▶3. Au bout de combien de temps, la personne pourra-t-elle reprendre la route ? Justifier votre réponse.