Polynômes du second degré

Définition et propriété

Un **polynôme du second degré** est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ de la forme $P(x) = \boldsymbol{ax^2 + bx + c}$ où $a \neq 0$, b et c sont des nombres réels.

Le nombre $\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac}$ est appelé **discriminant** du polynôme.

- si $\Delta > 0$ alors l'équation $P(x) = ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions réelles

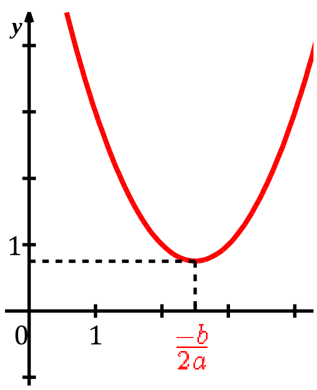
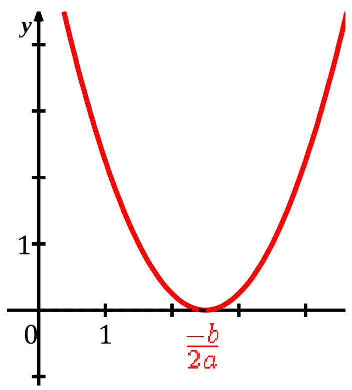
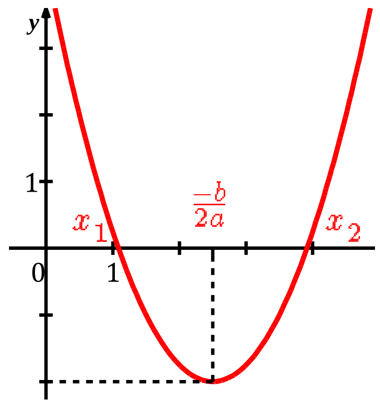
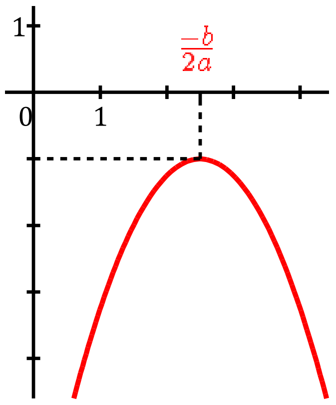
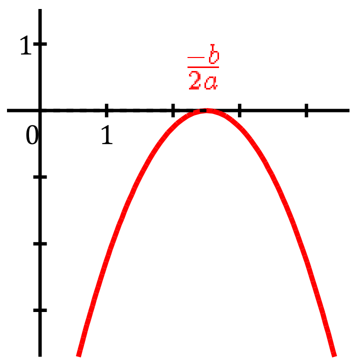
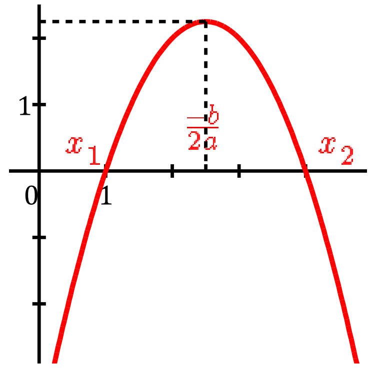
$$\boldsymbol{x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}$$

- si $\Delta = 0$ alors l'équation $P(x) = ax^2 + bx + c = 0$ admet une solution réelle double

$$\boldsymbol{x' = \frac{-b}{2a}}$$

- si $\Delta < 0$ alors l'équation $P(x) = ax^2 + bx + c \ = 0$ n'admet pas de solution réelle.

Remarque : Si α est une racine du polynôme P alors ce polynôme peut être factorisé par $(x - \alpha)$.

	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
Le polynôme $ax^2 + bx + c$	n'admet pas de racine	admet une racine double $-b/2a$	admet deux racines simples x_1 et x_2.
Si $a > 0$ La parabole est tournée vers le haut			
Si $a < 0$ La parabole est tournée vers le bas			

Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
Signe de $P(x)$		Signe a	0	Signe $(-a)$	0	Signe a	

Exercices

Piste Verte

Exercice V1.

▶ 1. Résoudre l'équation $3x^2 - 12x + 12 = 0$

▶ 2. L'équation $4x^2 - 4x + 1 = 0$ admet-elle des solutions ?

▶ 3. Résoudre l'équation $x^2 - 6 - x = 0$.

▶ 4. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation $x^2 - 4x + 5 = 0$.

Exercice V2.

▶ 1. Résoudre l'équation $16x^2 - 8x + 1 = 0$.

▶ 2. Factoriser le polynôme $P(x) = 3x^2 + 2x - 1$.

▶ 3. La fonction $f(x) = \frac{1}{3x^2 - x + 2}$ possède-t-elle des valeurs interdites ? Justifier.

Piste Bleue

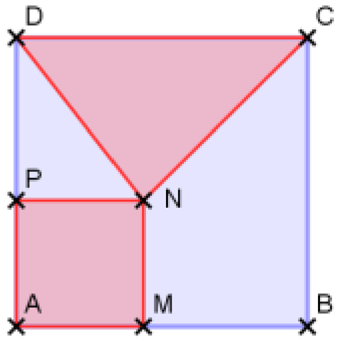
Exercice B1.

Quel est le domaine de définition de la fonction $f(x) = \frac{1}{x^2+x+1}$?

Exercice B2.

1. Etudier le signe du polynôme $P(x) = -2x^2 - 2x + 4$.
2. Résoudre l'inéquation $2x^2 - 12x + 18 \leq 0$.

Exercice B3.



$ABCD$ est un carré de côté 20 cm. Soit M un point du segment $[AB]$, les points N et P sont placés pour que $AMNP$ soit un carré, P appartenant au segment $[AD]$.
On note $AM = x$, $f(x)$ l'aire du carré $AMNP$ et $g(x)$ l'aire du triangle DCN.

▶ 1. Exprimer $f(x)$ et $g(x)$ en fonction de x.

▶ 2 a) Résoudre l'inéquation $x^2 + 10x - 200 \leq 0$.

b) Déterminer pour quelles valeurs de x, l'aire du carré $AMNP$ est inférieure ou égale à l'aire du triangle DCN.

Piste Rouge

Exercice R1.

$$\text{Résoudre l'inéquation } \frac{3}{4x-1} \leq x$$

Exercice R2.

Un organisateur de spectacle a remarqué que si x est le prix d'une place de son spectacle alors son bénéfice s'élève à $B(x) = -25x^2 + 275x + 2000$ pour x entre 0 et 15 euros. Il veut obtenir un bénéfice au moins égal à 2600 €. Dans quelle fourchette doit-il alors vendre la place de spectacle ?

Exercice R3.

On souhaite construire un parc rectangulaire de périmètre 270 m et d'aire 3224 m^2.

Quelles doivent être ses dimensions ?

CORRECTION DES EXERCICES
Piste Verte

Exercice V1.

▶ 1. Résolvons l'équation $3x^2 - 12x + 12 = 0$.

$\Delta = (-12)^2 - 4 \times 3 \times 12 = 0$

L'équation admet alors une unique solution :

$$x = \frac{12}{2 \times 3} = \frac{12}{6} = 2$$

L'ensemble des solutions est donc $\mathcal{S} = \{2\}$.

▶ 2. Résolvons l'équation $4x^2 - 4x + 1 = 0$.

$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 4 = 0$

L'équation admet alors une unique solution :

$$x = \frac{4}{2 \times 4} = 0{,}5$$

L'ensemble des solutions est donc $\mathcal{S} = \{0{,}5\}$.

▶ 3. Résolvons l'équation $x^2 - 6 - x = 0 = x^2 - x - 6$.

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-6) = 25 > 0$

L'équation a alors deux solutions :

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{25}}{2 \times 1} = \frac{1-5}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

ou $x_2 = \dfrac{1 + \sqrt{25}}{2 \times 1} = \dfrac{1+5}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$

L'ensemble des solutions est donc $\mathcal{S} = \{-2 ; 3\}$.

▶ 4. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation $x^2 - 4x + 5 = 0$.

$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 5 = 16 - 20 = -4 < 0$

L'équation n'a donc pas de solution.

L'ensemble des solutions est donc $\mathcal{S} = \emptyset$.

Exercice V2.

▶ 1. Résolvons l'équation $16x^2 - 8x + 1 = 0$.

$\Delta = (-8)^2 - 4 \times 16 = 0$

L'équation admet alors une unique solution :

$$x = \frac{8}{2 \times 16} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

L'ensemble des solutions est donc $\mathcal{S} = \{0{,}25\}$.

▶ 2. Pour factoriser le polynôme $P(x) = 3x^2 + 2x - 1$, nous cherchons ses racines.

$\Delta = 2^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 4 + 12 = 16 > 0$

Le polynôme possède alors deux racines :

$$x_1 = \frac{-2-\sqrt{16}}{2 \times 3} = \frac{-2-4}{6} = -\frac{6}{6} = -1$$

ou $x_2 = \dfrac{-2+\sqrt{16}}{2 \times 3} = \dfrac{-2+4}{6} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

On peut alors écrire que $P(x) = 3(x+1)\left(x - \frac{1}{3}\right)$.

►3. Résolvons l'équation $3x^2 - x + 2 = 0$.

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 3 \times 2 = 1 - 24 = -23 < 0$

L'équation n'a donc pas de solution, **la fonction $f(x) = \frac{1}{3x^2-x+2}$ ne possède donc aucune valeur interdite.**

Piste Bleue

Exercice B1.

Résolvons l'équation $x^2 + x + 1 = 0$.

$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 = -3 < 0$

L'équation n'a donc pas de solution, la fonction $f(x) = \frac{1}{x^2+x+1}$ ne possède donc aucune valeur interdite.

La fonction $f(x) = \frac{1}{x^2+x+1}$ est donc définie sur $\mathbb{R}$.

Exercice B2.

1. Etudions le signe du polynôme $P(x) = -2x^2 - 2x + 4$.

   $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 4 \times (-2) = 4 + 32 = 36 > 0$

Le polynôme possède alors deux racines :

$$x_1 = \frac{2-\sqrt{36}}{2 \times (-2)} = \frac{2-6}{-4} = \frac{-4}{-4} = 1$$

ou $x_2 = \dfrac{2+\sqrt{36}}{2 \times (-2)} = \dfrac{2+6}{-4} = \dfrac{8}{-4} = -2$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
Signe de $P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

car $a = -2 < 0$

2. Résoudre l'inéquation $2x^2 - 12x + 18 \leq 0$.

$\Delta = (-12)^2 - 4 \times 2 \times 18 = 0$

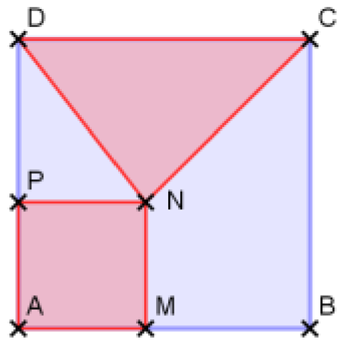
Le polynôme $2x^2 - 12x + 18$ possède alors une unique racine :

$$x = \frac{12}{2 \times 2} = 3$$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
Signe de $P(x)$		$+$	0	$+$	

car $a = 2 > 0$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc $S = \emptyset$.



Exercice B3.

$ABCD$ est un carré de côté 20 cm. Soit M un point du segment $[AB]$, les points N et P sont placés pour que $AMNP$ soit un carré, P appartenant au segment $[AD]$.

On note $AM = x$, $f(x)$ l'aire du carré $AMNP$ et $g(x)$ l'aire du triangle DCN.

▶ 1. $f(x) = x^2$

$$g(x) = \frac{b \times h}{2} = \frac{DC \times DP}{2} = \frac{20 \times (20 - x)}{2} = 10 \times (20 - x) = 200 - 10x$$

▶ 2 a) Résolvons l'inéquation $x^2 + 10x - 200 \leq 0$.

$\Delta = 10^2 - 4 \times (-200) = 900 > 0$

Le polynôme $x^2 + 10x - 200$ possède alors deux racines :

$$x_1 = \frac{-10 - \sqrt{900}}{2} = \frac{-10 - 30}{2} = \frac{-40}{2} = -20$$

$$\text{ou } x_2 = \frac{-10 + \sqrt{900}}{2} = \frac{-10 + 30}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

x	$-\infty$		-20		10		$+\infty$
Signe de $x^2 + 10x - 200$		$+$	0	$-$	0	$+$	

car $a = 1 > 0$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc $S = [-20; 10]$.

b) Résolvons $f(x) \leq g(x)$

$$\Leftrightarrow x^2 \leq 200 - 10x$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 10x - 200 \leq 0$$

On a alors, d'après la question précédente, $x \in [-20; 10]$ or $x \in [0; 20]$ donc les solutions appartiennent à l'intervalle $[-20; 10] \cap [0; 20] = [0; 10]$.

L'aire du carré $AMNP$ est inférieure ou égale à l'aire du triangle DCN pour tout $x \in [0; 10]$.

Piste Rouge

Exercice R1.

$$\text{Résolvons l'inéquation } \frac{3}{4x-1} \leq x$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4x-1} - x \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4x-1} - \frac{x(4x-1)}{4x-1} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3 - x(4x-1)}{4x-1} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-4x^2+x+3}{4x-1} \leq 0$$

Déterminons les racines de $-4x^2+x+3$:

$\Delta = 1^2 - 4 \times (-12) = 49 > 0$

Le polynôme $-4x^2+x+3$ possède alors deux racines :

$$x_1 = \frac{-1-7}{-8} = 1$$

$$\text{ou } x_2 = \frac{-1+7}{-8} = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4}$$

Etudions le signe de $\frac{-4x^2+x+3}{4x-1}$

x	$-\infty$		$-3/4$		$1/4$		1		$+\infty$
Signe de $x^2+10x-200$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $4x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe du quotient		$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	

car $a = -4 < 0$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc $S = \left[-\frac{3}{4} ; 1/4\right[\cup [1 ; +\infty[$.

Exercice R2.

$$\text{Résolvons } B(x) \geq 2600$$
$$\Leftrightarrow -25x^2 + 275x + 2000 \geq 2600$$
$$\Leftrightarrow -25x^2 + 275x - 600 \geq 0$$

$\Delta = 275^2 - 4 \times (-25) \times (-600) = 15625 > 0$

Le polynôme $-25x^2 + 275x - 600$ possède alors deux racines :

$$x_1 = \frac{-275-125}{-50} = \frac{400}{50} = 8$$

$$\text{ou } x_2 = \frac{-275+125}{-50} = \frac{150}{50} = 3$$

x	$-\infty$	3	8	$+\infty$

car $a = -25 < 0$

Signe de $B(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Pour obtenir un bénéfice au moins égal à 2600 €, l'organisateur doit vendre la place de spectacle entre 3 et 8 euros.

Exercice R3.

Aire ABCD = 3224

Périmètre ABCD = 270

Notons x et y les longueurs des côtés du rectangle.
Le périmètre mesure 270 m donc $2x + 2y = 270$

$$\Leftrightarrow x + y = 135$$
$$\Leftrightarrow y = 135 - x$$

L'aire est égale à 3224 m² donc $x \times y = 3224$

On a alors $x \times (135 - x) = 3224$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 135x - 3224 = 0$$

$$\Delta = 135^2 - 4 \times (-1) \times (-3224) = 5329 > 0$$

Le polynôme $-x^2 + 135x - 3224$ possède alors deux racines :

$$x_1 = \frac{-135 - 73}{-2} = \frac{-208}{-2} = 104$$

$$\text{ou } x_2 = \frac{-135 + 73}{-2} = \frac{62}{-2} = -31 \text{ exclu car } x \geq 0$$

Les dimensions du rectangle sont donc $x = 104$ m et $y = 135 - 104 = 31$ m.