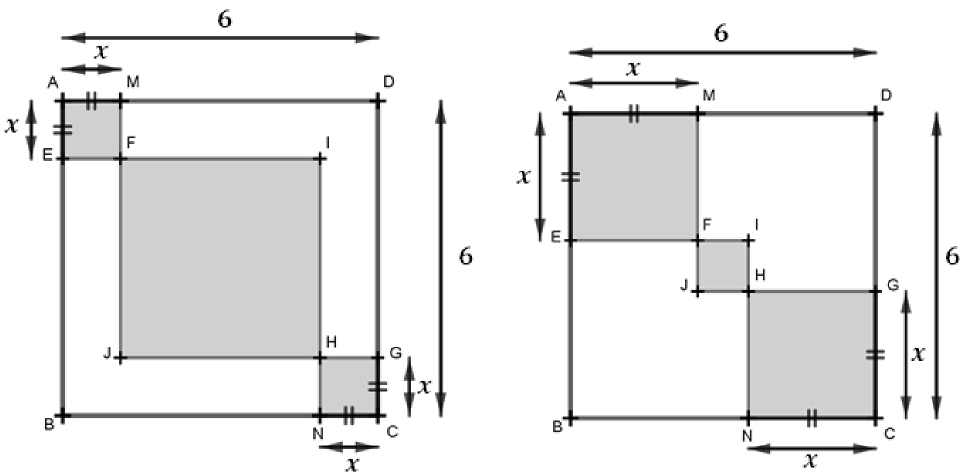
EXERCICE 1. (8 points)

$ABCD$ est un carré de côté 6 cm. Le point M est un point mobile sur le segment $[AB]$, on note x la longueur AM. On construit les carrés $AMFE$ où $E \in [AB]$ et $HGCN$ où $N \in [CB]$ et $G \in [CD]$ et enfin $FIHJ$. Pour tout x on note $f(x)$ l'aire grisée composée des trois carrés.



▶ 1. a) Dans quel intervalle x peut-il varier ?
b) Démontrer que $f(x) = 6x^2 - 24x + 36$.

▶ 2 *a*) Calculer $f'(x)$.
b) Etudier le signe de $f'(x)$.
c) Dresser, alors, le tableau de variations de f.
d) Pour quelle valeur de x, l'aire est-elle minimale, et, que vaut ce minimum ?

Correction

Exercice 1.	**1a**	x peut varier entre 0 et 3 : $x \in [0; 3]$.	**1**
	1b	L'aire est formée de 3 morceaux : 2 carrés de côtés de longueur x et un carré de côté de longueur $(6 - 2x)$. $f(x) = x^2 + (6 - 2x)^2 + x^2$ $f(x) = x^2 + 36 - 24x + 4x^2 + x^2$ $f(x) = 6x^2 - 24x + 36$	**1**
	2a	$f'(x) = 12x - 24$	**1**
	2b	$f'(x) > 0$ $\Leftrightarrow 12x - 24 > 0$ $\Leftrightarrow 12x > 24$ $\Leftrightarrow x > \frac{24}{12} = 2$	**2**

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td>2c</td><td>$$\begin{array}{c|ccccc} x & 0 & & 2 & & 3 \\ \hline f'(x) & & - & 0 & + & \\ \hline f(x) & 36 & \searrow & 12 & \nearrow & 18 \end{array}$$ $$f(0) = 6 \times 0 - 24 \times 0 + 36 = 36$$ $$f(3) = 3^2 + (6 - 2 \times 3)^2 + 3^2 = 18$$ $$f(2) = 6 \times 2^2 - 24 \times 2 + 36 = 12$$</td><td>2</td></tr>
<tr><td>2d</td><td>L'aire est donc minimale pour $x = 2$ et elle vaut 12 cm².</td><td>1</td></tr>
</table>

EXERCICE 2. (8 points)

Lorsqu'un fil électrique est parcouru par un courant électrique d'intensité constante, celui-ci s'échauffe par effet Joule et sa température varie en fonction du temps.
On note $f(t)$ la température, exprimée en degré Celsius, du conducteur à l'instant t, exprimé en seconde, avec t variant dans l'intervalle $[0; +\infty[$:

$$f(t) = -22\, e^{-0,05t} + 40$$

▶1. Déterminer la température au début puis au bout d'une minute.
▶2 a) Démontrer que la fonction dérivée est égale à $f'(t) = 1,1e^{-0,05t}$.
b) Etudier le signe de la dérivée.
c) Dresser le tableau de variation de la fonction f.
▶3. Déterminer le premier instant t, en seconde, à partir duquel la température du fil du conducteur dépasse 21°Celsius.
▶4. Est-il possible que la température du fil du conducteur dépasse 41°Celsius ?

<table>
<tr><td rowspan="3">Exercice 2.</td><td>1.</td><td>Au début soit pour $t = 0$ seconde, la température vaut 18°C car : $$f(0) = -22\, e^{-0,05\times 0} + 40$$ $$f(0) = -22 + 40 = 18$$ Au bout d'une minute soit pour $t = 60$ secondes, la température vaut 38,9°C car : $$f(60) = -22\, e^{-0,05\times 60} + 40 \approx 38,9$$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2a</td><td>$f(t) = \mathbf{-22}\ \underbrace{e^{-0,05t}}_{e^u} + \mathbf{40}$

$f'(t) = \mathbf{-22} \times \underbrace{(-0,05) \times e^{-0,05t}}_{u'\times e^u} + \mathbf{0}$

$f'(t) = 1,1\, e^{-0,05t}$</td><td>1,5</td></tr>
<tr><td>2b</td><td>Pour tout t, $e^{-0,05t} > 0$ donc $f'(t) > 0$</td><td>1</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td rowspan="2">Exercice 2.</td>
<td>2c</td>
<td>
<table>
<tr><td>t</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f'(t)$</td><td colspan="2">$+$</td></tr>
<tr><td>$f(t)$</td><td>18</td><td>$\nearrow$ 40</td></tr>
</table>
</td>
<td>1</td>
</tr>
<tr>
<td>3.</td>
<td>
$f(t) \geq 21$
$-22\ e^{-0,05t} + 40 \geq 21$
Je soustrais 40 de chaque côté
$-22\ e^{-0,05t} + 40 - \mathbf{40} \geq 21 - \mathbf{40}$
$-22\ e^{-0,05t} \geq -19$
Je divise par -22 de chaque côté, l'inégalité change alors de sens
$\dfrac{-22\ e^{-0,05t}}{\mathbf{-22}} \leq \dfrac{-19}{\mathbf{-22}}$
$e^{-0,05t} \leq \dfrac{19}{22}$
Je prends le logarithme de chaque côté
$\ln(e^{-0,05t}) \leq \ln\left(\dfrac{19}{22}\right)$
$-0,05t \leq \ln\left(\dfrac{19}{22}\right)$
Je divise par $-0,05$ de chaque côté, l'inégalité change alors de sens
$\dfrac{-0,05t}{\mathbf{-0,05}} \geq \dfrac{\ln\left(\frac{19}{22}\right)}{\mathbf{-0,05}}$
$t \leq \dfrac{\ln(19) - \ln(22)}{-0,05} \approx 2,93$
La température du fil du conducteur dépassera 21°Celsius au bout de 2,93 secondes.
</td>
<td>2,5</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>4.</td>
<td>
$f(t) \geq 41$
$-22\ e^{-0,05t} + 40 \geq 41$
$-22\ e^{-0,05t} \geq 1$
$e^{-0,05t} \leq \dfrac{1}{-22}$ or pour tout $t, e^{-0,05t} > 0$
La température du fil du conducteur ne dépassera donc jamais les 41°Celsius.
</td>
<td>1</td>
</tr>
</table>

EXERCICE 3. (4 points)

Au rayon location d'un grand magasin, on loue à la semaine des machines-outils, et on se propose d'étudier la rentabilité de ce service. On suppose que le coût de fonctionnement hebdomadaire (en centaines d'euros) correspondant à la location de x machines est donné par
$f(x) = 4x + 9 - 20\ln(0{,}2x + 1)$ où $x > 0$.

▶ 1. Calculer, à l'euro près, $f(10)$ et $f(20)$. Le coût de fonctionnement hebdomadaire est-il proportionnel au nombre de machines louées ?

▶ 2. Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = \frac{0{,}8x}{0{,}2x+1}$. En déduire le sens de variation du coût.

Exercice 3.	**1.**	$f(10) = 4 \times 10 + 9 - 20\ln(0{,}2 \times 10 + 1)$ $f(10) = 49 - 20\ln(3) \approx 27{,}03$ $f(20) = 4 \times 20 + 9 - 20\ln(0{,}2 \times 20 + 1)$ $f(20) = 89 - 20\ln(5) \approx 56{,}81$ $2 \times f(10) \approx 2 \times 27{,}03 \approx 54{,}06 \neq 56{,}81$ Le coût de fonctionnement hebdomadaire n'est donc pas proportionnel au nombre de machines louées.	**2**
	2.	$f(x) = \mathbf{4x} + \mathbf{9} - 20\,\underbrace{\ln(0{,}2x + 1)}_{\ln(u)}$ $f'(x) = \mathbf{4} + \mathbf{0} - 20 \times \underbrace{\frac{0{,}2}{0{,}2x + 1}}_{\frac{u'}{u}}$ $f'(x) = \frac{4(0{,}2x + 1)}{0{,}2x + 1} - \frac{4}{0{,}2x + 1}$ $f'(x) = \frac{0{,}8x + 4 - 4}{0{,}2x + 1}$ $f'(x) = \frac{0{,}8x}{0{,}2x + 1}$ $x > 0$ donc $0{,}8x > 0$ et $0{,}2x + 1 > 0$ $f'(x) = \frac{0{,}8x}{0{,}2x + 1} > 0$ Le coût de fonctionnement hebdomadaire f est donc croissant sur $]0; +\infty[$.	**2**