EXERCICE 1. (6 points)

On considère les nombres complexes suivants : $z_1 = 4 + 5i$ et $z_2 = 2 - 3i$.

▶1. Ecrire sous forme algébrique $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $(z_1)^2$ et $z_1 \times z_2$.

▶2. Ecrire sous forme algébrique $\frac{z_1}{z_2}$.

▶3. a) Résoudre l'équation : $z^2 - 4z + 13 = 0$.

b) Résoudre l'équation : $2z^2 + 5z - 3 = 0$.

1.	$z_1 = 4 + 5i$ et $z_2 = 2 - 3i$ $z_1 + z_2 = 4 + 5i + 2 - 3i$ $z_1 + z_2 = 4 + 5i + 2 - 3i$ $\boldsymbol{z_1 + z_2 = 6 + 2i}$	**0,5**
	$z_1 = 4 + 5i$ et $z_2 = 2 - 3i$ $z_1 - z_2 = 4 + 5i - (2 - 3i)$ $z_1 - z_2 = 4 + 5i - 2 + 3i$ $\boldsymbol{z_1 - z_2 = 2 + 8i}$	**0,5**
	$z_1 = 4 + 5i$ $(z_1)^2 = (4 + 5i)^2 = (4 + 5i) \times (4 + 5i)$ $(z_1)^2 = 16 + 40i + 25i^2$ $(z_1)^2 = 16 + 40i - 25$ $\boldsymbol{(z_1)^2 = 40i - 9}$	**1**
	$z_1 = 4 + 5i$ et $z_2 = 2 - 3i$ $z_1 \times z_2 = (4 + 5i) \times (2 - 3i)$ $z_1 \times z_2 = 4 \times 2 + 4 \times (-3i) + 5i \times 2 + 5i \times (-3i)$ $z_1 \times z_2 = 8 - 12i + 10i - 15i^2$ $z_1 \times z_2 = 8 - 2i + 15$ $\boldsymbol{z_1 \times z_2 = 23 - 2i}$	**1**
2.	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4 + 5i}{2 - 3i} = \frac{(4 + 5i) \times (2 + 3i)}{(2 - 3i) \times (2 + 3i)}$ $\frac{z_1}{z_2} = \frac{8 + 12i + 10i + 15i^2}{4 - 9i^2}$ $\frac{z_1}{z_2} = \frac{8 + 22i - 15}{4 + 9} = \frac{22i - 7}{13}$ $\boldsymbol{\frac{z_1}{z_2} = \frac{-7 + 22i}{13}}$	**1**
3.	$z^2 - 4z + 13 = 0$ $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 13$ $\Delta = 16 - 52 = -36 < 0$ Il y a donc deux solutions complexes :	**1**

	$z_1 = \frac{4 - i\sqrt{36}}{2 \times 1} = \frac{4 - 6i}{2} = \frac{4}{2} - \frac{6i}{2} = 2 - 3i$ $z_2 = 2 + 3i$	
4.	$2z^2 + 5z - 3 = 0$ $\Delta = 5^2 - 4 \times 2 \times (-3)$ $\Delta = 25 + 24 = 49 > 0$ Il y a donc deux solutions réelles : $z_1 = \frac{-5 - \sqrt{49}}{2 \times 2} = \frac{-5 - 7}{4} = -\frac{12}{4} = -3$ $z_2 = \frac{-5 + \sqrt{49}}{2 \times 2} = \frac{-5 + 7}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$	**1**

EXERCICE 2. (5 points)

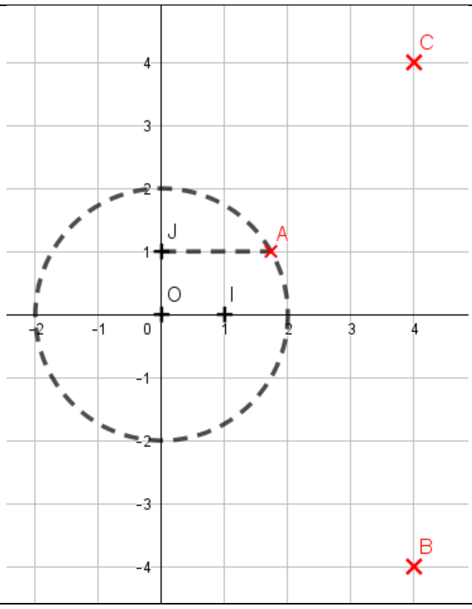
Dans un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = \sqrt{3} + i$, $z_B = 4 - 4i$ et $z_C = \overline{z_B}$.

▶ 1. Ecrire sous forme trigonométrique z_A, z_B et z_C.

▶ 2. Placer les points A, B et C dans le repère.

▶ 3. Quelle est la nature du triangle OBC ?

1.	$z_A = \sqrt{3} + i$ $\lvert z_A \rvert = \lvert\sqrt{3} + i\rvert = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$ $\left.\begin{aligned} \cos(\theta_A) &= \frac{\text{partie réelle}}{\text{module}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta_A) &= \frac{\text{partie imaginaire}}{\text{module}} = \frac{1}{2} \end{aligned}\right\}$ donc $\theta_A = \frac{\pi}{6}$ à 2π près $\boldsymbol{z_A = \sqrt{3} + i = 2\, e^{i\frac{\pi}{6}}}$	**2**
	$z_B = 4 - 4i$ $\lvert z_B \rvert = \lvert 4 - 4i \rvert = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{16 \times 2} = 4\sqrt{2}$ $\left.\begin{aligned} \cos(\theta_B) &= \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta_B) &= \frac{-4}{4\sqrt{2}} = \frac{-1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{aligned}\right\}$ donc $\theta_B = \frac{-\pi}{4}$ à 2π près $\boldsymbol{z_B = 4 - 4i = 4\sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}}$	**2**
	$z_C = \overline{z_B}$ On en déduit que $\lvert z_C \rvert = \lvert \overline{z_B} \rvert = \lvert z_B \rvert = 4\sqrt{2}$ et $\arg(z_C) = -\arg(z_B) = \frac{\pi}{4}$ à 2π près $\boldsymbol{z_C = \overline{z_B} = 4 + 4i = 4\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}}$	

2. 3.		$(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OB}) = \frac{-\pi}{4}$ et $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OC}) = \frac{\pi}{4}$ donc $(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ Le triangle OBC est donc rectangle en O. $\lvert z_C\rvert = \lvert z_B\rvert$ donc $OC = OB$ **Le triangle OBC est donc rectangle et isocèle en O.**	**1**

EXERCICE 3. (5 points)

▶ 1. Déterminer les limites ci-dessous :

$$\lim_{x\to+\infty} x^3 + 3x^2 = \qquad \lim_{x\to-\infty} x^3 + 3x^2 =$$

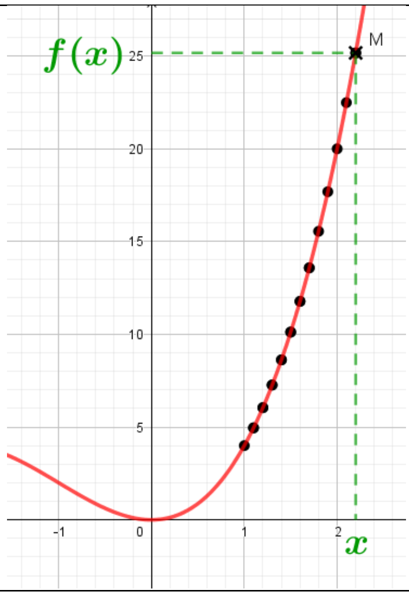
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - 3}{1 + 2x^2} = \qquad \lim_{x\to0^+} \ln(x) - x =$$

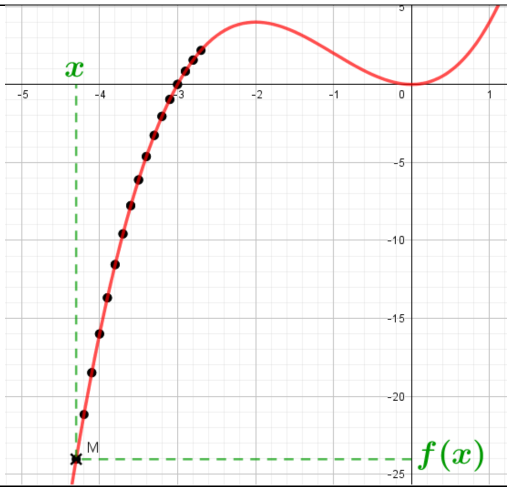
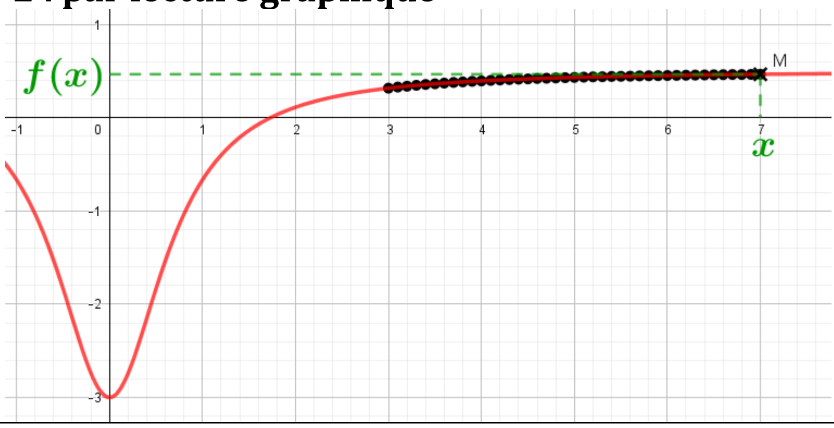
▶ 2. La fonction définie, pour tout $t \in [0\,;+\infty[$, par :

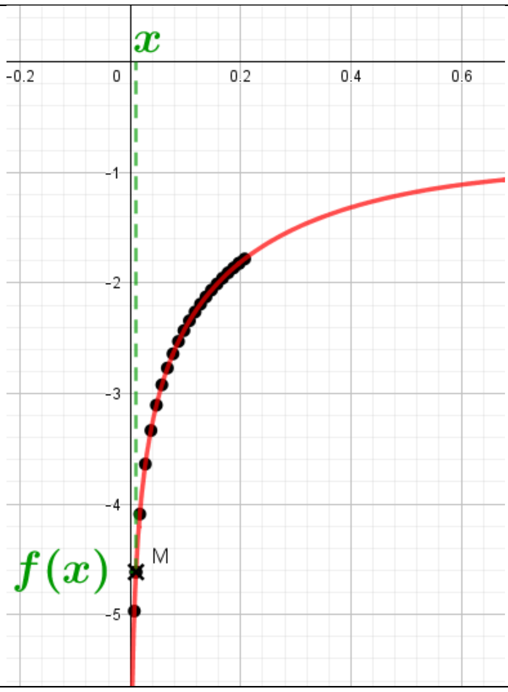
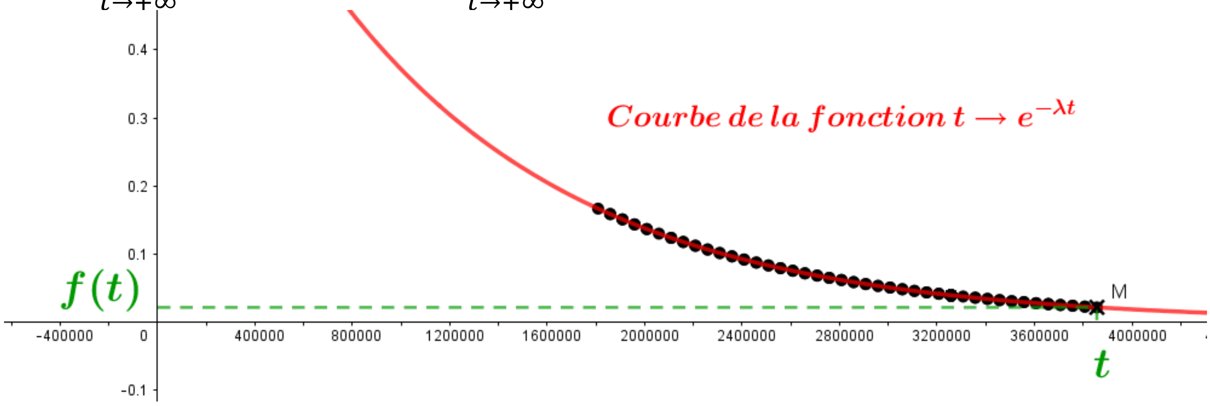
$$N(t) = N_0\, e^{-\lambda t}$$

Elle détermine le nombre de noyaux radioactifs d'iode 131 qui restent à l'instant t où $N_0 > 0$ est le nombre de noyaux initialement présents et $\lambda = 9{,}9 \times 10^{-7}$ la constante de désintégration de l'iode 131.

Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction $N(t)$.

1.	**Méthode n°1 : par raisonnement** $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2 = +\infty\end{array}\right\}$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 + 3x^2 = +\infty$ **Méthode n°2 : par lecture graphique**		**1**
	Méthode n°1 : par raisonnement : $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} 3x^2 = +\infty\end{array}\right\}$ donc, par somme la forme est indéterminée Mais, on peut dire que :		**1**

	$\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 + 3x^2 = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = -\infty$ **Méthode n°2 : par lecture graphique**  	
	Méthode n°1 : par raisonnement : $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - 3 = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} 1 + 2x^2 = +\infty \end{array}\right\}$ donc, par quotient la forme est indéterminée Mais, on peut dire que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 3}{1 + 2x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{2x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ **Méthode n°2 : par lecture graphique**  	**1**
	Méthode n°1 : par raisonnement : $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} x = 0 \end{array}\right\}$ donc, par somme $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) - x = -\infty$	**1**

		
2.	$\lim\limits_{t \to +\infty} -\lambda t = -\infty$ car $\lambda = 9{,}9 \times 10^{-7} > 0$ donc $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-\lambda t} = 0$ et donc $\lim\limits_{t \to +\infty} N(t) = 0$ 	**1**

EXERCICE 4. (4 points)

Une entreprise étudie la déformation des pièces de bois qu'elle utilise pour ses charpentes lorsque celles-ci sont soumises à une charge constante. Le jour de l'installation la poutre ne subit aucune déformation. On considère alors la fonction f, définie sur $[0; +\infty[$, représentant la déformation en millimètres (mm) de la poutre en fonction du temps t exprimé en jours à partir de l'installation.

$$f(t) = 4 - 4\,e^{-0{,}0125\,t}$$

▶ 1. Déterminer la déformation au bout de 150 jours.

▶ 2. Déterminer le nombre de jours nécessaire pour que la déformation atteigne 2 mm.

▶ 3. Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$. Quelle interprétation peut-on faire de ce résultat ?

▶ 4. Déterminer par le calcul le nombre de jours à partir duquel la déformation atteint 90 % de sa valeur limite.

1.	Pout $t = 150$, $f(150) = 4 - 4\,e^{-0{,}0125 \times 150} \approx 3{,}4$ mm **Au bout de 150 jours, la déformation atteint 3,4 mm.**	**0,5**

2.	On résout : $$f(t) = 2$$ $$\mathbf{4} - 4\,e^{-0{,}0125\,t} = 2$$ Je soustrais 4 de chaque côté $$-4\,e^{-0{,}0125\,t} = 2 \mathbf{- 4}$$ $$-4\,e^{-0{,}0125\,t} = -2$$ Je divise par -4 de chaque côté $$e^{-0{,}0125\,t} = \frac{-2}{\mathbf{-4}}$$ $$\boldsymbol{e}^{-0{,}0125\,t} = \frac{1}{2}$$ Je prends le logarithme de chaque côté $$-0{,}0125\,t = \mathbf{ln}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)$$ $$\mathbf{-0,0125}\,t = -\ln(2)$$ Je divise par $-0{,}0125$ de chaque côté $$t = \frac{-\ln(2)}{\mathbf{-0,0125}}$$ $$t = \frac{\ln(2)}{0{,}0125} \approx 55{,}5 \text{ jours}$$ **Il faudra 56 jours pour que la déformation atteigne 2 mm.**	**1**
3.	$\lim\limits_{t\to+\infty} -0{,}0125\,t = -\infty$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-0{,}0125\,t} = 0$ et donc $\lim\limits_{t\to+\infty} 4\,e^{-0{,}0125\,t} = 0$ On en déduit que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} 4 - 4\,e^{-0{,}0125\,t} = 4 \text{ mm}$ **Au fur et à mesure que le temps va passer, la déformation va s'approcher de 4 mm.**	**1**
4.	90% de sa valeur limite représente 3,6 mm : On résout : $$f(t) = 3{,}6$$ $$\mathbf{4} - 4\,e^{-0{,}0125\,t} = 3{,}6$$ Je soustrais 4 de chaque côté $$-4\,e^{-0{,}0125\,t} = 3{,}6 \mathbf{- 4}$$ $$-4\,e^{-0{,}0125\,t} = -0{,}4$$ Je divise par -4 de chaque côté $$e^{-0{,}0125\,t} = \frac{-0{,}4}{\mathbf{-4}}$$ $$\boldsymbol{e}^{-0{,}0125\,t} = \frac{1}{10}$$ Je prends le logarithme de chaque côté $$-0{,}0125\,t = \mathbf{ln}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{10}}\right)$$ $$\mathbf{-0,0125}\,t = -\ln(10)$$ Je divise par $-0{,}0125$ de chaque côté $$t = \frac{-\ln(10)}{\mathbf{-0,0125}}$$	**1,5**

	$$t = \frac{\ln(10)}{0{,}0125} \approx 184{,}2 \text{ jours}$$ **Il faudra 185 jours pour que la déformation atteigne 90% de sa valeur limite.**	