Lundi 7 janvier 2025

BTS → Devoir à rédiger n° 1

Mathématiques

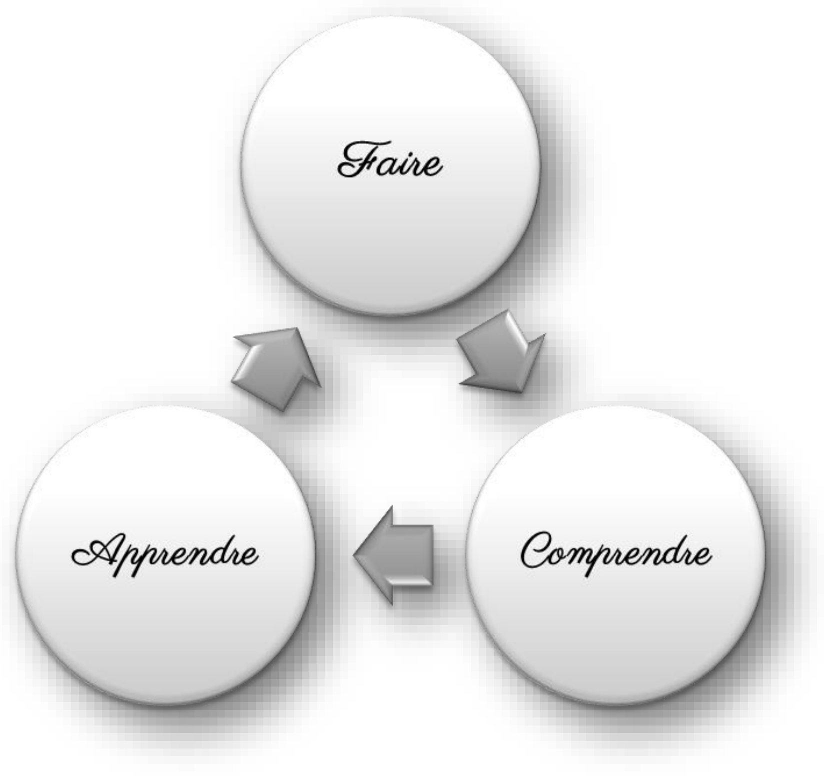

Table des matières

Enoncé du sujet

Exercice 1.

Au rayon location d'un grand magasin, on loue à la semaine des machines-outils, et on se propose d'étudier la rentabilité de ce service. On suppose que le coût de fonctionnement hebdomadaire (en centaines d'euros) correspondant à la location de x machines est donné par $f(x) = 4x + 41 - 20\ln(x)$ où $x > 0$.

▶ 1. Calculer, à l'euro près, $f(5)$ et $f(10)$. Le coût de fonctionnement hebdomadaire est-il proportionnel au nombre de machines louées ?

▶ 2 a) Calculer $f'(x)$ puis étudier le signe de $f'(x)$.

b) En déduire le tableau de variation du coût de fonctionnement hebdomadaire.

c) Le coût de fonctionnement hebdomadaire admet-il un extremum ? Si oui pour combien de machines louées ?

Exercice 2.

Soit v la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $v(t) = 2400 - 2400\, e^{-0,01\,t}$

▶ 1. Calculer $v'(t)$ pour tout t de $[0; +\infty[$, puis étudier son signe pour $t \geq 0$.

▶ 2. En déduire le sens de variation de la fonction v sur $[0; +\infty[$.

▶ 3. Résoudre sur $[0; +\infty[$ l'équation $v(t) = 1200$. *Donner la valeur exacte de la solution, puis une valeur approchée arrondie à* 10^{-1}.

▶ 4. Un réservoir contient 60 m^3 d'eau destinée à abreuver du bétail. Dans ce qui suit, t est **le temps exprimé en heures**. À l'instant $t = 0$, se déverse dans le réservoir une eau polluée par une substance M. Un système de trop plein permet de conserver à tout instant à partir de l'instant $t = 0$ un volume de 60 m^3 dans le réservoir. On admet, qu'à l'instant t (exprimé en heures), **le volume exprimé en litres**, de substance polluante M présente dans le réservoir est $v(t) = 2400 - 2400\, e^{-0,01\,t}$.

a) La santé du bétail est menacée lorsque le volume de substance M dans le réservoir atteint 2% du volume total du réservoir. En déduire la valeur de t à partir de laquelle la santé du bétail est menacée par la présence dans le réservoir de substance M.

b) Le volume de substance M dans le réservoir peut-il dépasser 4% du volume du réservoir ? Justifier votre réponse.

BTS ⇥ Devoir à rédiger n° 1

Mathématiques

Correction du sujet

Correction de l'exercice 1.

Au rayon location d'un grand magasin, on loue à la semaine des machines-outils, et on se propose d'étudier la rentabilité de ce service. On suppose que le coût de fonctionnement hebdomadaire (en centaines d'euros) correspondant à la location de x machines est donné par $f(x) = 4x + 41 - 20\ln(x)$ où $x > 0$.

▶ 1. Calculer, à l'euro près, $f(5)$ et $f(10)$. Le coût de fonctionnement hebdomadaire est-il proportionnel au nombre de machines louées ?

▶ 2 a) Calculer $f'(x)$ puis étudier le signe de $f'(x)$.

b) En déduire le tableau de variation du coût de fonctionnement hebdomadaire.

c) Le coût de fonctionnement hebdomadaire admet-il un extremum ? Si oui pour combien de machines louées ?

Exercice 1.	**1.**	$f(5) = 4 \times 5 + 41 - 20\ln(5)$ $f(5) = 61 - 20\ln(5) \approx 28{,}81$ centaines d'euros soit 2 881€. $f(10) = 4 \times 10 + 41 - 20\ln(10)$ $f(10) = 81 - 20\ln(10) \approx 34{,}95$ centaines d'euros soit 3 495€. 10 est le double de 5 alors que 34,95 n'est pas le double de 28,81. Le coût de fonctionnement hebdomadaire n'est donc pas proportionnel au nombre de machines louées
	2a.	$f(x) = 4x + 41 - 20\ln(x)$ $f'(x) = 4 \quad + 0 \quad - 20 \times \frac{1}{x}$ $f'(x) = 4 - \frac{20}{x}$ $f'(x) = \frac{4x}{x} - \frac{20}{x}$ $f'(x) = \frac{4x - 20}{x}$ $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 4x - 20 > 0$ car $x > 0$ $\Leftrightarrow 4x > 20$ $\Leftrightarrow x > \frac{20}{4}$ $\Leftrightarrow x > 5$
	2b.	$\begin{array}{|c|ccccc|} \hline x & 0 & & 5 & & +\infty \\ \hline f'(x) & & - & 0 & + & \\ \hline f(x) & & \searrow & & \nearrow & \\ & & & 28{,}81 & & \\ \hline \end{array}$
	2c.	Le coût de fonctionnement hebdomadaire admet un minimum. Le coût de fonctionnement hebdomadaire est minimum pour $x = 5$ machines louées et il vaut 28,81 centaines d'euros soit 2 881€.

Correction de l'exercice 2.

Soit v la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $v(t) = 2400 - 2400\,e^{-0{,}01\,t}$

▶1. Calculer $v'(t)$ pour tout t de $[0;+\infty[$, puis étudier son signe pour $t \geq 0$.

▶2. En déduire le sens de variation de la fonction v sur $[0;+\infty[$.

▶3. Résoudre sur $[0;+\infty[$ l'équation $v(t) = 1200$. *Donner la valeur exacte de la solution, puis une valeur approchée arrondie à* 10^{-1}*.*

▶4. Un réservoir contient 60 m³ d'eau destinée à abreuver du bétail. Dans ce qui suit, t est **le temps exprimé en heures.** À l'instant $t = 0$, se déverse dans le réservoir une eau polluée par une substance M. Un système de trop plein permet de conserver à tout instant à partir de l'instant $t = 0$ un volume de 60 m³ dans le réservoir. On admet, qu'à l'instant t (exprimé en heures), **le volume exprimé en litres**, de substance polluante M présente dans le réservoir est $v(t) = 2400 - 2400\,e^{-0{,}01\,t}$.

a) La santé du bétail est menacée lorsque le volume de substance M dans le réservoir atteint 2% du volume total du réservoir. En déduire la valeur de t à partir de laquelle la santé du bétail est menacée par la présence dans le réservoir de substance M.

b) Le volume de substance M dans le réservoir peut-il dépasser 4% du volume du réservoir ? Justifier votre réponse.

Exercice 2.	**1.**	$v(t) = 2400 - 2400\,e^{-0{,}01\,t}$ $v'(t) = \quad 0 \quad - 2400 \times\ e^{-0{,}01\,t} \times (-0{,}01)$ $v'(t) = 24\,e^{-0{,}01\,t}$ or $e^{-0{,}01\,t} > 0$ donc $v'(t) > 0$
	2.	$\begin{array}{\|c\|c\|} \hline t & 0 \quad +\infty \\ \hline v'(t) & + \\ \hline v(t) & \nearrow \\ \hline \end{array}$
	3.	$\begin{aligned} v(t) &= 1200 \\ 2400 - 2400\,e^{-0{,}01\,t} &= 1200 \\ -2400\,e^{-0{,}01\,t} &= 1200 - 2400 \\ -2400 \times\ e^{-0{,}01\,t} &= -1200 \\ e^{-0{,}01\,t} &= \frac{-1200}{-2400} \\ e^{-0{,}01\,t} &= 0{,}5 \\ -0{,}01\,t &= \ln(0{,}5) \\ -0{,}01 \times t &= \ln(0{,}5) \\ t &= \frac{\ln(0{,}5)}{-0{,}01} \quad \text{valeur exacte} \end{aligned}$ $t = \dfrac{\ln(0{,}5)}{-0{,}01}$ valeur exacte $t \approx 69{,}315$ $t \approx 69{,}3$ valeur approchée à 10^{-1}
	4a.	2% du volume total du réservoir 60 m³ représente $\frac{2}{100} \times 60 = 1{,}2\ m^3$ or $1\ m^3 = 1000\ L$ donc $1{,}2\ m^3 = 1200\ L$. D'après la question 3, la santé du bétail est menacée par la présence dans le réservoir de substance M dans le réservoir au bout de 69,3 heures.
	4b.	4% du volume total du réservoir 60 m³ représente $\frac{4}{100} \times 60 = 2{,}4\ m^3 = 2400\ L$. Résolvons :

		$\begin{aligned} v(t) &= 2400 \\ 2400 - 2400\, e^{-0{,}01\, t} &= 2400 \\ -2400\, e^{-0{,}01\, t} &= 2400 - 2400 \\ -2400 \times e^{-0{,}01\, t} &= 0 \\ e^{-0{,}01\, t} &= \frac{0}{-2400} \\ e^{-0{,}01\, t} &= 0 \quad \text{ce qui est impossible.} \end{aligned}$ L'équation n'a pas de solution. Le volume de substance M dans le réservoir ne peut donc pas dépasser 4% du volume du réservoir.