Fiche n°14 : Développements limités – **BTS**
Comment approxime-t-on une fonction ?

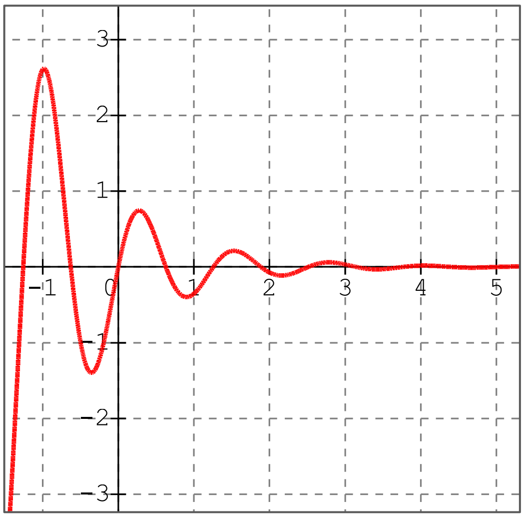
Activité.

▶ 1. Sur un ordinateur ou une calculatrice,

a) Tracer la représentation graphique de la fonction $f(x) = e^x$.
b) Tracer la représentation graphique de la fonction $g_1(x) = 1 + x$. Qu'observe-t-on ?
c) Tracer la représentation graphique de la fonction $g_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$. Qu'observe-t-on ?
d) Tracer la représentation graphique de la fonction $g_3(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$.
e) Sur le même modèle, donner l'expression de $g_4(x)$ puis de $g_5(x)$.

$$\boxed{\boldsymbol{1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + x^3\varepsilon(x)} \textbf{ s'appelle le développement limité de } \boldsymbol{e^x} \textbf{ en 0 à l'ordre 3.}}$$

▶ 2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et dont la représentation graphique est donnée ci-contre. Avec un logiciel de calcul formel, on obtient :



1	series$(f(x), x, 0{,}3)$
	$\rightarrow 5x - 5x^2 + \dfrac{-55}{3}x^3 + x^3\ \varepsilon(x)$

Cela signifie que $f(x) = 5x - 5x^2 + x^2\varepsilon(x)$

a) Compléter le tableau ci-dessous en donnant des valeurs approximatives :

x	$-0{,}05$	0	$0{,}05$	$0{,}1$
$f(x)$				

b) Les valeurs ci-dessus sont-elles des approximations par excès ou par défaut ?

Définition.

Un **développement limité** d'une fonction en un point est une approximation polynomiale de cette fonction au voisinage de ce point, c'est-à-dire l'écriture de cette fonction sous la forme de la somme d'une fonction polynomiale et d'un reste négligeable au voisinage du point considéré.

$$\boldsymbol{f(x) = \underbrace{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n}_{partie\ \ régulière} + \underbrace{x^n\varepsilon(x)}_{reste\ \ négligeable}} \quad \textbf{avec } \boldsymbol{\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0}$$

En physique, il est fréquent de confondre la fonction avec son développement limité, à condition que l'erreur (c'est-à-dire le reste) ainsi faite soit inférieure à l'erreur autorisée.

Exercice 1. PISTE BLEUE

Avec un logiciel de calcul formel, on obtient :

1	$f(x) = \exp(x)$
	$\rightarrow f(x) = e^x$
2	series$(f(x), x, 0{,}3)$
	$\rightarrow 1 + x + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{6}x^3 + x^3\ \varepsilon(x)$

▶ 1. Quelle est l'équation de la tangente en 0 ?

▶2. a) Pour tout réel x, déterminer le signe de $f(x)-(1+x)$.
b) En déduire la position relative de la courbe et de sa tangente.
c) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$.

Exercice 2. PISTE BLEUE
Avec un logiciel de calcul formel, on obtient :

1	$f(x)=\text{sqrt}(3+x^3)$	
		$\to f(x)=\sqrt{3+x^3}$
2	$\text{series}(f(x),x,0{,}3)$	
		$\to \sqrt{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{6}x^3+x^3\,\varepsilon(x)$

Quelle est la tangente ? Quelle sont les positions relatives ?

Exercice 3. PISTE BLEUE
On considère la fonction $f(x)=\dfrac{\sin(x)}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.
Avec un logiciel de calcul formel, on obtient :

1	$f(x)=\sin(x)/x$	
		$\to f(x)=\dfrac{\sin(x)}{x}$
2	$\text{series}(f(x),x,0{,}3)$	
		$\to 1-\dfrac{x^2}{6}+x^2\,\varepsilon(x)$

▶1. Quelle est l'équation de la tangente en 0 ?
▶2. a) Pour tout réel x, déterminer le signe de $f(x)-1$.
b) En déduire la position relative de la courbe et de sa tangente.
c) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x}$.

Exercice 4. PISTE BLEUE
On considère la fonction $f(x)=\ln(1+x)$ définie sur $\mathbb{R}$. Un logiciel de calcul formel, nous donne l'affichage ci-dessous :

1	$f(x)=\ln(1+x)$	
		$\to f(x)=\ln(1+x)$
2	$\text{series}(f(x),x,0{,}3)$	
		$\to x-\dfrac{x^2}{2}+x^2\,\varepsilon(x)$

▶1. Quelle est l'équation de la tangente en 0 ?
▶2. a) Pour tout réel x, déterminer le signe de $f(x)-x$.
b) En déduire la position relative de la courbe et de sa tangente.
c) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.