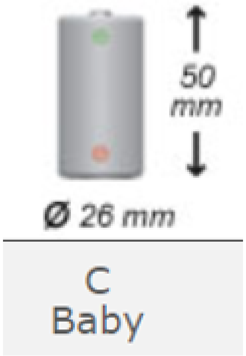
Problème

Dans une entreprise, les piles de type Baby sont emballées dans des cartons de forme cubique sans couvercle. L'entreprise dispose d'une machine d'emballage qui, à partir d'une plaque en carton ondulé de 31,2 cm de côté, coupe quatre carrés à chaque coin, replie les bords contre les piles placées au centre puis entoure le tout de plastique.
L'entreprise peut-elle changer la taille des quatre carrés découpés pour que le volume de la boite puisse être optimisé ?
Combien de piles de plus pourra-t-on mettre dans chaque carton avec un découpage optimisé ?



Ce qu'il faut retenir :

Fonction f	**Dérivée f'**
un nombre réel constant	0
x	1
x^2	$2x$

Fonction f	**Dérivée f'**
x^3	$3x^2$
x^n où n est entier non nul	$n\ x^{n-1}$
$u + \lambda \times v$	$u' + \lambda \times v'$

Exercice 1. PISTE BLEUE

Pour chaque fonction, calculer sa dérivée, étudier son signe puis dresser son tableau de variations :

$$a)\ f(x) = 2x^2 - 3x + 1 \text{ sur } \mathbb{R}$$
$$b)\ g(x) = 5 + x(x - 7) \text{ sur } \mathbb{R}$$
$$c)\ h(x) = (3x + 1)(2 - 5x) \text{ sur } \mathbb{R}$$

Exercice n°2. PISTE BLEUE

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x) = (7 - x)(2x - 2)$

a) Développer l'expression de $f(x)$.
b) Calculer la dérivée $f'(x)$.
c) Etudier le signe de $f'(x)$ et donner le tableau de variations de f.
d) La fonction f admet-elle un maximum ou un minimum ? et combien vaut-il ?
e) Résoudre l'équation $f(x) = 10$.

Exercice n°3. PISTE BLEUE

Avec une ficelle de longueur 10 cm, on peut fabriquer des rectangles. **Quelles dimensions doit-on donner à notre rectangle pour que son aire soit maximale ?**

Exercice n°4. PISTE BLEUE

Un champ rectangulaire a pour longueur 50 m et pour largeur 40 m. On diminue sa longueur de x mètres et on augmente sa largeur de x mètres. On se demande comment évolue son aire. ***Pour quelle valeur de x l'aire est-elle maximale ? Combien vaut cette aire maximale ?***

Exercice 5. PISTE BLEUE

Une entreprise fabrique entre 0 et 35 ordinateurs par mois. Le résultat d'exploitation, réalisé par la vente de x ordinateurs, est donné en centaines d'euros par

$$f(x) = -x^2 + 30x - 125.$$

▶1. Combien vaut le résultat d'exploitation pour 10 ordinateurs vendus ?

▶2. Combien faut-il vendre d'ordinateurs pour que le résultat d'exploitation soit de 9000 euros ?

▶3. Déterminer $f'(x)$ sur l'intervalle [0 ; 35].

▶4. Etudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f.

▶5. En déduire le nombre d'ordinateurs à produire pour que le résultat d'exploitation soit maximal. Que vaut alors ce maximum ?

Exercice n°6. PISTE ROUGE

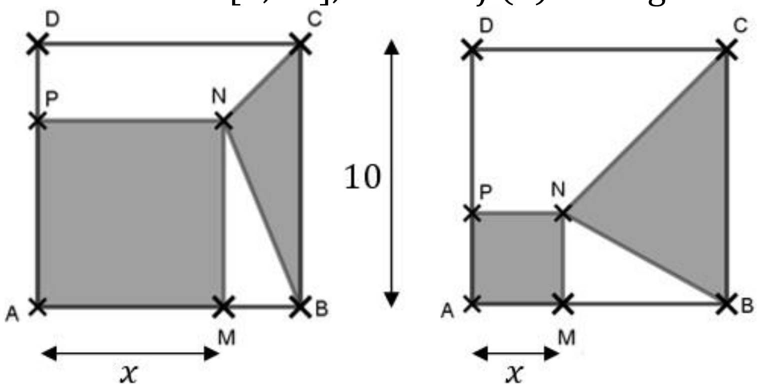
ABCD est un rectangle de largeur 5 cm et de longueur 10 cm. Les points M, N, P et Q appartiennent respectivement aux côtés [AB], [BC], [DC] et [AD] tels que AM=BN=CP=DQ.

Déterminer, en justifiant, la position du point M pour que l'aire du quadrilatère MNPQ soit minimale.

Exercice n°7. PISTE ROUGE

$ABCD$ est un carré de côté 10 cm. Le point M est un point mobile sur le segment $[AB]$, on note x la longueur AM. On construit le carré AMNP et le triangle NBC.

Pour tout $x \in [0; 10]$, on note $f(x)$ l'aire grisée.



▶1. Démontrer que, pour tout $x \in [0; 5]$, $f(x) = x^2 - 5x + 50$.

▶2 a) Calculer $f'(x)$.

b) Déterminer pour quelles valeurs de x, $f'(x) > 0$.

c) Dresser, alors, le tableau de variations de f.

d) Pour quelle valeur de x, l'aire est-elle minimale, et, que vaut ce minimum ?