« L'invention des logarithmes, en réduisant le temps passé aux calculs de quelques mois à quelques jours, double pour ainsi dire la vie des astronomes » (Pierre-Simon de Laplace)

La fin du XVI^{e} siècle est l'époque des grands voyages maritimes et de la découverte des lois régissant le mouvement des planètes (Copernic, Kepler…). Les mesures astronomiques, nécessaires pour la navigation, impliquent des calculs compliqués. Les multiplications, divisions et extractions de racines sont particulièrement longues et pénibles. Pour simplifier ces calculs, on cherche à construire des tables numériques à deux colonnes, mettant en correspondance les nombres de telle manière qu'à la multiplication de deux nombres de la colonne de gauche corresponde l'addition de deux nombres de la colonne de droite.

La première table de ce type est publiée par l'Ecossais **John Neper** en 1614, après quarante ans de travail ! En voici un extrait (ci-contre).

0,1	
0,5	
1	
1,5	
2	0,69315
3	1,09861
4	1,38629
5	1,60944
6	1,79176
7	1,94591
8	2,07944
9	2,19722
10	2,30259
11	2,39790
12	2,48491
13	2,56495
14	2,63906
15	2,70805
16	2,77259
17	2,83321
18	2,89037
19	2,94444
20	2,99573
21	
22	
100	
	1

▶1. Vérifier sur quelques exemples la propriété annoncée. Quel nombre doit-on écrire en face de 1 ? Quel nombre doit-on écrire en face de 21 ? de 22 ?

▶2. Quand on divise deux nombres de la colonne de gauche, que peut-on dire de ceux de la colonne de droite ? En déduire les nombres à écrire en face de : 1,5; 0,5; 0,1.

▶3. Pour désigner les nombres de la colonne de droite on invente le mot «logarithme», forgé à partir des deux mots grecs logos (rapport) et arithmos (nombre entier naturel) : en effet si les nombres de gauche sont dans un rapport constant (c'est à dire en progression géométrique), alors ceux de droite sont à différence constante (c'est à dire en progression arithmétique). Vérifier cette propriété en considérant dans la première colonne les nombres 1, 2, 4, 8, 16.

▶4. Quand on élève un nombre au carré, que peut-on dire de son logarithme ? En déduire le logarithme de 100.

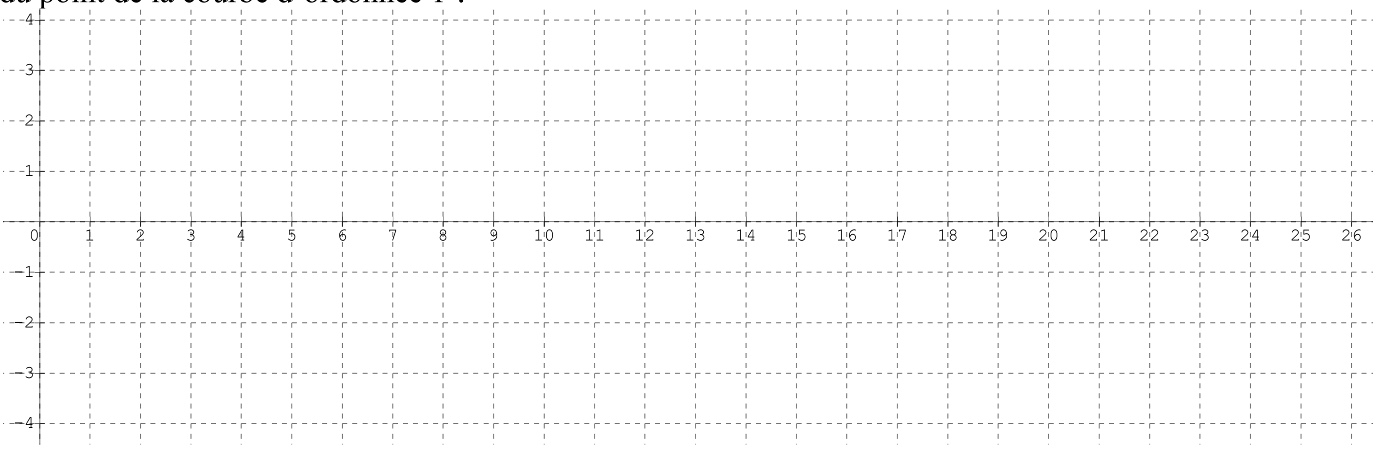
▶5. Quand on prend la racine carrée d'un nombre, que peut-on dire de son logarithme ? En déduire le logarithme de $\sqrt{5}$.

Ainsi, cette table ramène les multiplications à des additions, les divisions à des soustractions, les extractions de racine carrée à des divisions par 2.

Un disciple de Neper, Briggs, publie en 1617 une autre table ayant les mêmes propriétés, mais plus commode pour les calculs : les logarithmes décimaux. Le Suisse Bürgi construit également, de façon indépendante, une table de logarithmes, qu'il publie en 1620. Cinquante ans plus tard, l'invention du calcul différentiel (dérivées et intégrales) par Newton et Leibniz permettra de découvrir que, en plus de ses propriétés pratiques, la fonction logarithme de Neper a un intérêt théorique considérable : non seulement elle a une dérivée remarquable, mais elle a un lien étroit avec la fonction exponentielle !

▶6. Pour tout x dans la colonne de gauche, on note $\ln(x)$ son logarithme dit népérien dans la colonne de droite. Traduire les propriétés des questions précédentes en formules.

▶7. Dans le repère ci-dessous, placer les points du tableau ci-contre et tracer la courbe. Quelle est l'abscisse du point de la courbe d'ordonnée 1 ?



Problème

Dans un tunnel de congélation, la température T en degré K d'une denrée diminue de 2% de sa valeur, toutes les minutes. A l'entrée du tunnel, pour $t = 0$, $T = 293\ K$ (soit 20°C). On note $T(t)$ la température exprimée en K, à l'instant t exprimé en minutes.

▶1. Montrer que $T(t) = 293 \times 0{,}98^t$.

▶2. En déduire que $t(T) = \dfrac{\ln(T) - \ln(293)}{\ln(0{,}98)}$.

▶3. Calculer $t'(T)$ pour tout $T \in [240; 293]$.

▶4. En déduire le sens de variation de cette fonction sur cet intervalle.

▶5. Déterminer la température atteinte après 480 secondes.

Ce qu'il faut retenir :

① La fonction logarithme népérien notée ln, est la primitive de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur]0,+∞[telle que

$$\ln(1) = 0 \text{ ce qui signifie que } (\ln(x))' = \frac{1}{x} \qquad \text{et} \qquad (\ln(u))' = \frac{u'}{u}$$

② Pour tous réels a et b tels que $a > 0$, $b > 0$ et pour tout entier relatif n.

$$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b) \qquad \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a) \qquad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

$$\ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln(a) \qquad \ln(a^n) = n\ln(a) \qquad \text{et} \qquad \ln(e) = 1 \text{ où } e \approx 2{,}718$$

Exercice n°1. PISTE BLEUE

Ecrire en fonction de $\ln(3)$: $\ln(3e)$ $\qquad \ln(81) \qquad \ln\left(\sqrt{27}\right) \qquad \ln\left(\frac{1}{9}\right) \qquad \ln\left(\frac{e}{\sqrt{3}}\right)$

Exercice n°2. PISTE BLEUE

Ecrire en fonction de $\ln(x)$ où $x > 0$: $\ln(x^5) \qquad \ln\left(\frac{1}{x^3}\right) \qquad \ln\left(\sqrt{x^7}\right) \qquad \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^3}}\right) \qquad \ln(e \times x^{12})$

Exercice n°3. PISTE BLEUE

Soit la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 3x + 4 - 5\ln(x)$
a) Pour tout $x \in]0; +\infty[$, calculer $f'(x)$ puis étudier le signe de $f'(x)$.
b) En déduire le tableau de variations de la fonction f.

Exercice n°4. PISTE BLEUE

Soit la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = -\frac{x^2}{2} + 5x - 6\ln(x)$
a) Pour tout $x \in]0; +\infty[$, calculer $g'(x)$ puis étudier le signe de $g'(x)$.
b) En déduire le tableau de variations de la fonction g.

Exercice n°5. PISTE ROUGE

Résoudre les équations : $2^n = 4\,294\,967\,296 \qquad 7^x = 3 \times 10^9 \quad$ et $\quad e^x = 12045$

Exercice n°6. PISTE ROUGE

Déterminer le maximum de la fonction $h(x) = \ln(2x + 1) - 3x$ définie sur $]0; +\infty[$.