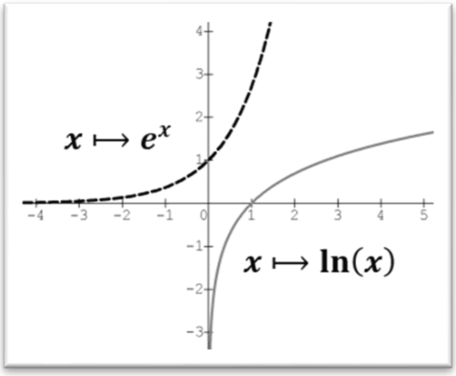
http://gaellebuffet.free.fr/

BTS – Fiche n°6 – Limite de fonctions

Problème :

Un cycliste monte le Mont Ventoux d'altitude 1910 mètres à une vitesse moyenne de 25 $km.h^{-1}$.
Quelle doit être sa vitesse en descente pour obtenir une vitesse moyenne de 50 $km.h^{-1}$ sur son trajet global ?



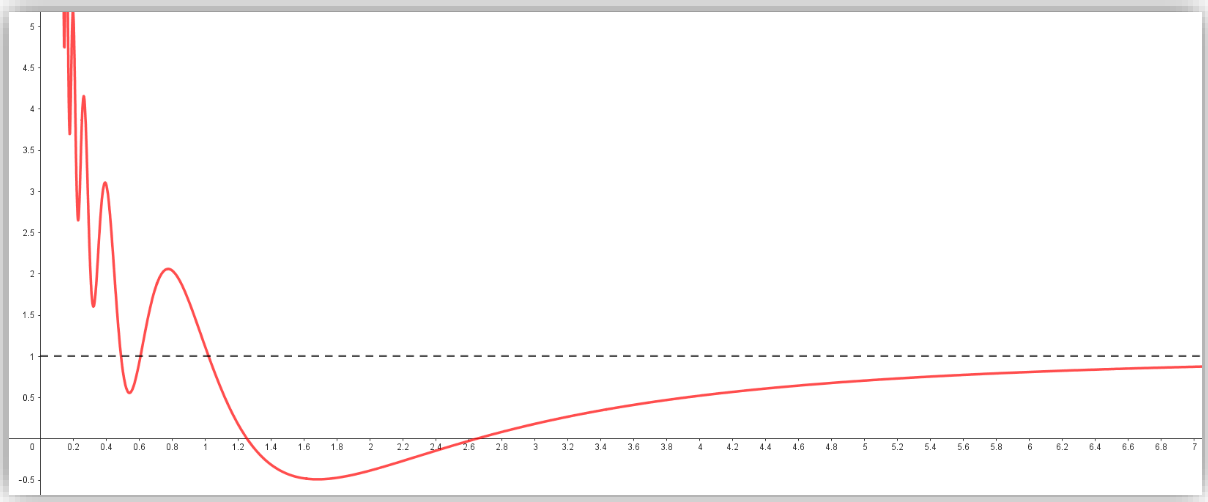
Ce qu'il faut retenir :

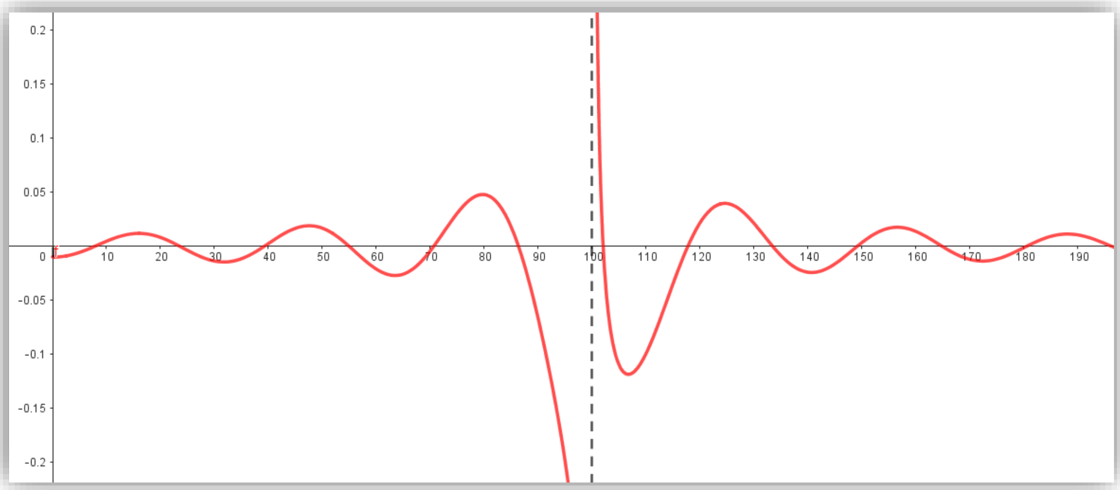
$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 =$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 =$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} x^5 =$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} =$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} =$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} =$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x =$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x =$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x =$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x =$

$a \in \mathbb{R}$, f admet une **asymptote verticale** d'équation $x = a$ lorsque $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$.
$L \in \mathbb{R}$, f admet une **asymptote horizontale** d'équation $y = L$ lorsque $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = L$.





Exercice n°1. PISTE BLEUE

Déterminer les asymptotes horizontales ou verticales éventuelles des fonctions ci-dessous :

$a)$ $f(x) = x + \ln(x)$ définie sur $]0; +\infty[$

$b)$ $f(x) = \dfrac{1 + \ln(x)}{x}$ définie sur $]0; +\infty[$

$c)$ $f(x) = e^x + e^{-x}$ définie sur $\mathbb{R}$

$d)$ $f(x) = e^x - 3x$ définie sur $\mathbb{R}$

Exercice n°2. PISTE BLEUE

On s'intéresse à une maladie dégénérative de l'œil qui occasionne des troubles de la vision. Le consiste à faire absorber au malade par voie orale un médicament qui libère peu à peu le principe actif qui passe dans le sang. Il est efficace lorsque la quantité de principe actif est supérieure ou égale à 5 mg. L'évolution en fonction du temps (exprimé en heures), de la quantité de principe actif présente dans le sang après absorption (exprimée en mg) est modélisée par la fonction

$$f(t) = (2t + 1)e^{-0,1t} \text{ pour tout } t \in [0; +\infty[$$

▶1. Quelle sera la quantité de principe actif dans le sang au bout de 30 minutes ?

▶2. Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$. Comment interprétez-vous ce résultat ?

▶3a) Déterminer $f'(t)$.

b) Étudier le signe de $f'(t)$sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

c) Dresser le tableau des variations de f sur $[0; +\infty[$.

Exercice n°3. PISTE BLEUE

À la sortie d'un four, un solide dont la température est de 70 °C est placé, pour le refroidir, dans une pièce dont la température ambiante reste constante et égale à 20 °C. Le solide peut être emballé pour expédition dès que sa température passe au-dessous de 40°C. On désigne par $f(t)$, la température, en degré Celsius (°C), du solide à l'instant t (en minute)

$$f(t) = 50\, e^{-0,07t} + 20 \text{ pour tout } t \in [0; +\infty[$$

▶1a) Quelle sera la température au bout de ¼ d'heure ?

b) Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$. Comment interprétez-vous ce résultat ?

c) Au bout de combien de temps le solide peut être emballé pour expédition ?

▶2a) Déterminer $f'(t)$.

b) Étudier le signe de $f'(t)$sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

c) Dresser le tableau des variations de f sur $[0; +\infty[$.

Exercice n°4. PISTE BLEUE

Dans une entreprise de fabrication de pièces métalliques, un ouvrier doit manipuler des plaques chaudes pendant une dizaine de secondes. À la sortie du four, les plaques sont à une température de 300 °C et disposées dans une pièce dont la température ambiante est maintenue à 26 °C par un système de ventilation.

La commission de sécurité prescrit qu'avec les gants actuels, l'ouvrier doit attendre
10 minutes pour manipuler les plaques à leur sortie du four. Afin de réduire ce délai d'attente, le directeur s'interroge sur l'achat de nouveaux gants dont les caractéristiques techniques établies par la commission de sécurité sont • Sans couture, • Très doux et confortables, • Température maximale d'utilisation : 240 °C.

La température d'une plaque depuis sa sortie du four, est modélisée en fonction du temps t, exprimé en minutes, par une fonction g. On admet que cette fonction g est définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $g(t) = 274\, e^{-0,05\,t} + 26$.

▶1. Calculer $g(0)$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} g(t)$. Ces résultats sont-ils conformes aux données ?

▶2. Quelle sera la température de la plaque, 3 minutes après sa sortie du four ?

▶3. Avec les gants actuellement utilisés, à quelle température l'ouvrier pourra-t-il manipuler les plaques après leur sortie du four, en respectant les caractéristiques techniques de la commission de sécurité ?

▶4. Si le directeur décidait d'équiper les ouvriers avec les nouveaux gants, quel délai d'attente minimal serait requis avant que les ouvriers puissent manipuler les plaques ?

En déduire le gain de temps, en pourcentage, dû à l'utilisation de ces nouveaux gants.