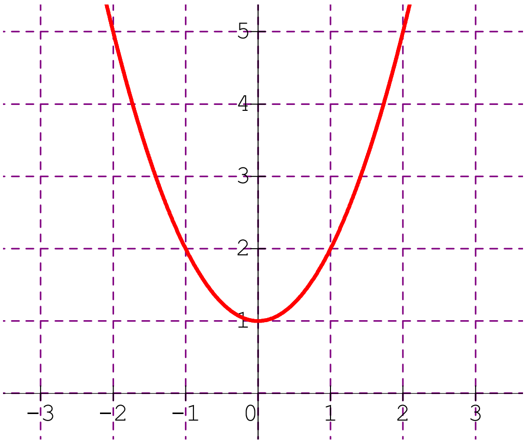
Fiche n°7 : Calcul d'intégrales
BTS

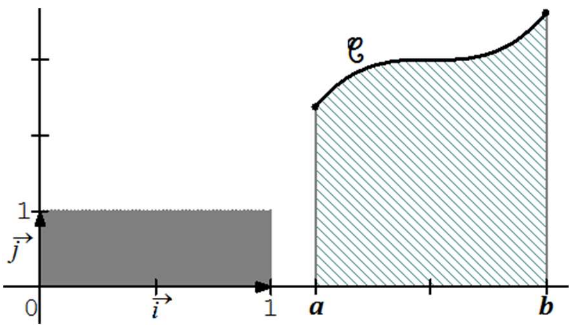
Problème :

Le but est de calculer l'intégrale $\boldsymbol{I = \int_0^1 (x^2+1)dx}$.

a) Déterminer une primitive de la fonction $f(x) = x^2 + 1$.
b) Recopier et compléter alors
$$I = [\ \ldots\ ]_{\ldots}^{\ldots} = \underbrace{\ldots}_{\text{on remplace } x \text{ par}\ldots} - \underbrace{\ldots}_{\text{on remplace } x \text{ par}\ldots}$$
c) Terminer alors, le calcul de l'intégrale.
d) Dans le repère ci-contre, on a tracé la fonction $f(x) = x^2 + 1$, hachurer l'aire calculée par l'intégrale I.



Ce qu'il faut retenir :



Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal. On appelle **intégrale de a à b de la fonction f** l'aire, en unités d'aire, du domaine situé sous la courbe $\mathcal{C}_f$ et limité par l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

On la note $\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx}$

L'**intégrale de a à b de la fonction f** est le nombre $\boldsymbol{F(b) - F(a)}$ où F est une primitive de f sur $[a, b]$

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)}$$

Exercice 1. PISTE BLEUE

Le but est de calculer l'intégrale $\boldsymbol{J}$

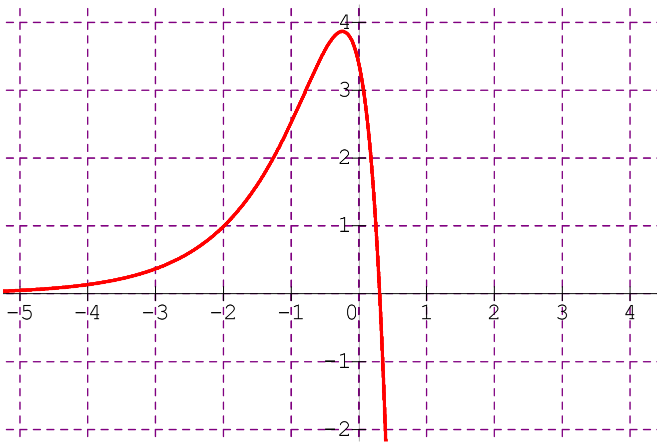
$$\boldsymbol{= \int_{-2}^{0} e^{x+2} - 4\, e^{3x} dx.}$$

a) Dans un repère, on a tracé la fonction $g(x) = e^{x+2} - 4\, e^{3x}$, hachurer l'aire calculée par l'intégrale J.

b) Déterminer graphiquement un ordre de grandeur de l'aire calculée par l'intégrale J.
c) Recopier et compléter
$J = [\ \ldots\ ]_{\ldots}^{\ldots}$

$$J = \underbrace{\ldots}_{\text{on remplace } x \text{ par}\ldots} - \underbrace{\ldots}_{\text{on remplace } x \text{ par}\ldots}$$

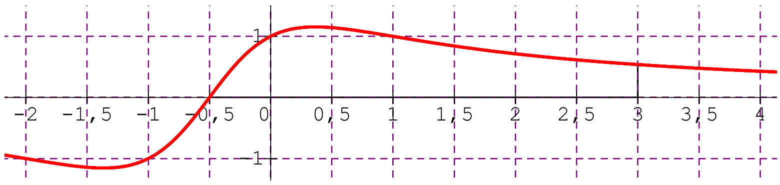
d) Terminer alors, le calcul de l'intégrale J.



Exercice 2. PISTE BLEUE

Le but est de déterminée l'aire hachurée ci-contre, où la fonction tracée est la fonction, définie sur $\mathbb{R}$

$$k(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$$



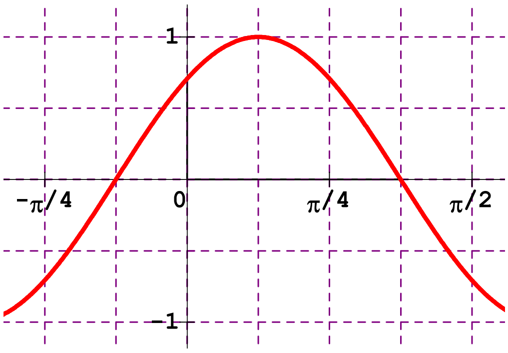
a) Exprimer, par une intégrale notée K, l'aire hachurée ci-dessus.

b) Recopier et compléter

$$K = [\ \dots\ ]_{\dots}^{\dots} = \underbrace{\dots}_{\text{on remplace } x \text{ par...}} - \underbrace{\dots}_{\text{on remplace } x \text{ par...}}$$

c) Terminer alors, le calcul de l'intégrale K.

Exercice 3. PISTE BLEUE



Le but est de déterminée l'aire hachurée ci-contre, où la fonction tracée est la fonction, définie sur $\mathbb{R}$

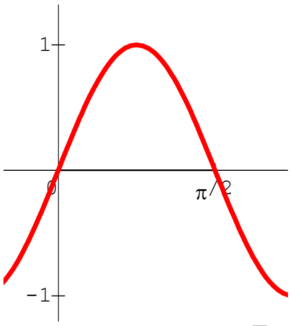
$$h(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right).$$

Exercice 4. PISTE BLEUE

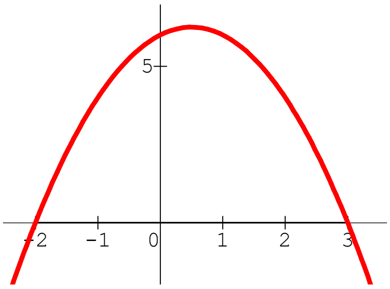
▶1. Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{\pi} \sin t\, dt\,,\quad J = \int_0^1 (2x^3 - x + 1)dx \quad \text{et} \quad K = \int_1^3 e^{2x} dx$$

▶2. Calculer les aires hachurées ci-dessous, (la fonction tracée est donnée au-dessous) :

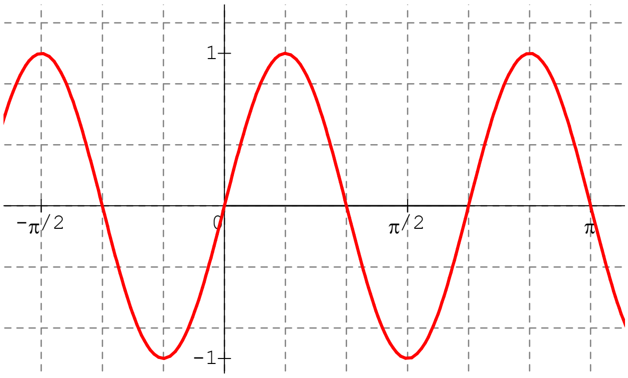


$f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$



$g(x) = -x^2 + x + 6$

Exercice 5. PISTE BLEUE



Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \sin(3x)$ dont la courbe représentative $\mathcal{C}$ est tracée dans un repère. Exprimer par une intégrale l'aire hachurée ci-contre. Conjecturer la valeur de cette intégrale, vérifier votre conjecture par le calcul.