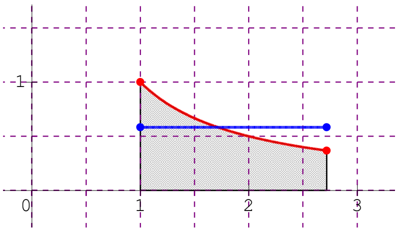
Problème :

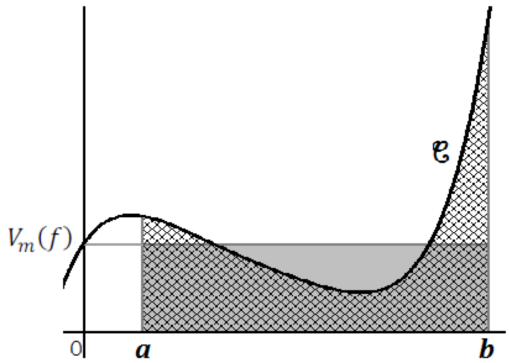


Déterminez la valeur moyenne de la fonction $\frac{1}{x}$ sur l'intervalle $[1; e]$.

Ce qu'il faut retenir :

Définition de la valeur moyenne :
Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ avec $a < b$
La valeur moyenne de f sur $[a, b]$ est

$$\boldsymbol{V_m(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx}.$$



Interprétation graphique :
L'aire du domaine hachuré situé sous la courbe $\mathcal{C}_f$ est égale à l'aire du rectangle gris de dimensions $b - a$ et $V_m(f)$.

Exercice 1. PISTE BLEUE

Calculer les valeurs moyennes suivantes :

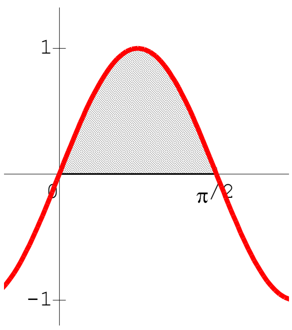
$$I = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin t\, dt$$

$$J = \frac{1}{2}\int_0^2 (2x^3 - x + 1)dx$$

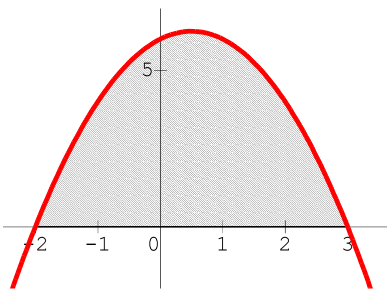
$$K = \frac{1}{2}\int_1^3 e^{2x}dx$$

Exercice 2. PISTE BLEUE

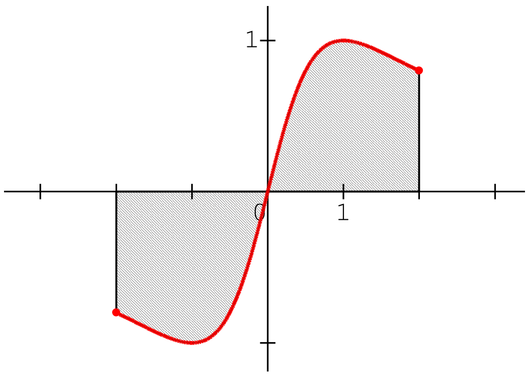
Calculer les valeurs moyennes des fonctions ci-dessous sur les intervalles donnés :



$$f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$$
$$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$



$$g(x) = -x^2 + x + 6$$
$$[-2,3]$$



$$h(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$$
$$[-2,2]$$

Exercice 3. PISTE BLEUE

On étudie la contamination accidentelle d'un cours d'eau par un polluant. On admet que la concentration du polluant dans l'eau en fonction du temps est modélisée par la fonction f définie pour tout t de l'intervalle $[0;+\infty[$, nombre de semaines écoulées, par $f(t)=79e^{-0{,}25t}-4e^{-t}$ concentration en mg/L.

▶ 1a) Quelle est la quantité de principe actif présente dans le sang au bout d'un mois ?

b) Déterminer la limite de f en $+\infty$. Interpréter cette limite.

▶ 2a) On note f' la fonction dérivée de f, démontrer que

$$f'(t)=(-19{,}75+4e^{-0{,}75t})e^{-0{,}25t}$$

b) Etudier le signe de $f'(t)$ sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

c) Dresser le tableau des variations de f sur $[0;+\infty[$.

d) Démontrer que $\displaystyle\int_0^{20} f(t)\,dt=-316e^{-5}+4e^{-20}+312$

▶ 3a) La baignade est sans danger lorsque la concentration de polluant dans l'eau est inférieure ou égale à 2,5 milligrammes par litre. Déterminer au bout de combien de semaines la baignade peut être autorisée.

b) Quelle est la valeur moyenne, au cours des 20 semaines suivant la contamination, de la concentration de polluant dans l'eau ?

Exercice 4. PISTE ROUGE

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par

$$f(x)=\frac{250}{1+0{,}003e^{0{,}9x}}$$

▶ 1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

▶ 2a) Vérifier que, pour tout réel positif x, $f'(x)=\dfrac{-0{,}675e^{0{,}9x}}{(1+0{,}003e^{0{,}9x})^2}$

b) Etudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0;+\infty[$ et donner le sens de variation de f sur $[0;+\infty[$.

▶ 3.Pour la suite, on admet que la fonction f modélise le nombre d'œufs pondus par mois dans un aquarium, en fonction de la concentration x en pesticide (en mg/L) sur l'intervalle $[0;50]$.

a) La concentration efficace médiane notée CE50 est la concentration qui correspond à une diminution de 50 % du nombre d'œufs pondus par mois par rapport à une eau sans pesticide. Déterminer cette concentration CE50 à 10^{-1} près. Expliquer votre démarche.

b) On donne la fonction F définie, pour tout réel positif x, par

$$F(x)=-\frac{2500}{9}\times\ln(e^{-0{,}9x}+0{,}003)$$

Démontrer que F est une primitive de f. Estimer, à l'unité près, le nombre moyen d'œufs pondus par mois, pour des concentrations en pesticide comprises entre 4 et 6 mg/L.