BTS Intégration par parties
Fiche n° 9

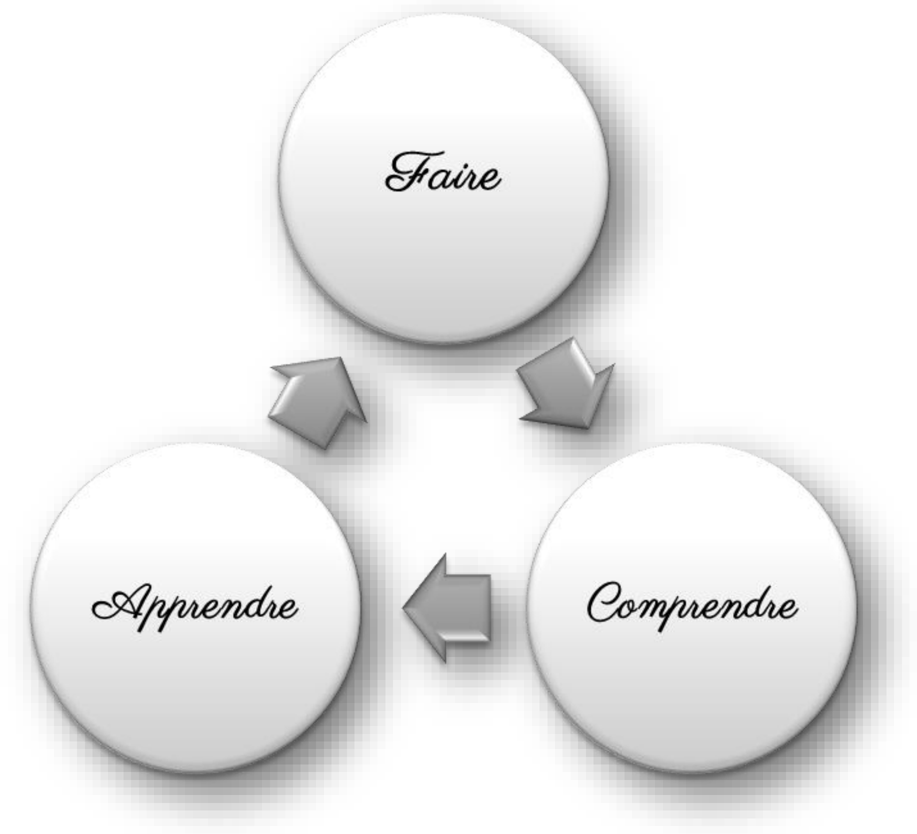


Table des matières

BTS → Intégration par parties
Fiche n° 9

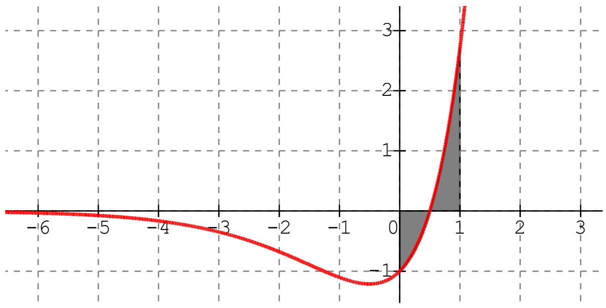
Enoncé des exercices

Exercice 1. ★

Dans le repère ci-dessous, nous avons tracé la représentation graphique de la fonction, définie sur $\mathbb{R}$,

$$f(t) = (2t-1)e^t$$

Calculez l'intégrale représentée par l'aire coloriée.



Ce qu'il faut retenir :

Intégrations par parties

Soit u et v deux fonctions définies et dérivables sur $[a, b]$ telles que u' et v' sont aussi dérivables sur $[a, b]$ alors

$$\int_a^b \boldsymbol{u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt}$$

$$\int \boldsymbol{u'v = [u\,v] - \int u\,v'}$$

Exercice 2. ★

A l'aide d'une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_{-2}^{0} (2+x)e^x dx \qquad J = \int_0^{\pi/2} x\sin(x)\,dx \qquad K = \int_1^e x\ln(x)\,dx$$

Exercice 3. ★

A l'aide d'une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^5 3xe^{-x}dx \qquad J = \int_0^{\pi/2} x\cos(x)\,dx \qquad K = \int_1^e \ln(x)\,dx$$

Exercice 4. ★

Dans une entreprise, lors d'une intervention sur la sécurité routière, on s'intéresse au taux d'alcool dans le sang.

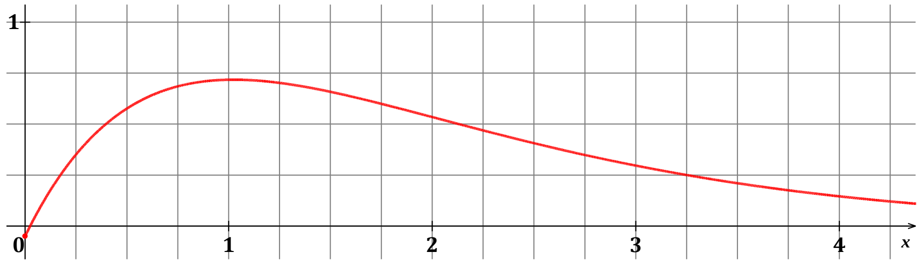
Partie A : Taux d'alcool, deux exemples

Le tableau donne les quantités d'alcool contenues dans certaines boissons alcoolisées.

Consommation	Quantité d'alcool (en g)
Un verre de 25 cL de bière	13 g
Un verre de 10 cL de vin	9 g
Une flûte de champagne	9 g
Un verre de 3 cL de whisky	13 g
Un verre de 5 cL d'apéritif	9 g

Environ une heure après ingestion, *on peut estimer* le taux d'alcool T dans le sang d'une personne, en fonction de son poids P, en kilogrammes, de la quantité d'alcool ingérée Q, en grammes, et d'un coefficient de diffusion K, à l'aide de la formule suivante : $T = \frac{Q}{P \times K}$.
On admet que K=0,7 pour les hommes et que $K = 0{,}6$ pour une femme.
▶ 1. À l'aide de la formule, estimer le taux d'alcool dans le sang, environ une heure après ingestion, d'un homme de 75 kg ayant consommé un verre de 25 cL de bière, deux verres de 10 cL de vin et une flûte de champagne.
▶ 2. Estimer la quantité d'alcool ingérée par une femme de 60 kg dont le taux d'alcool mesuré est 0,5 une heure après ingestion.

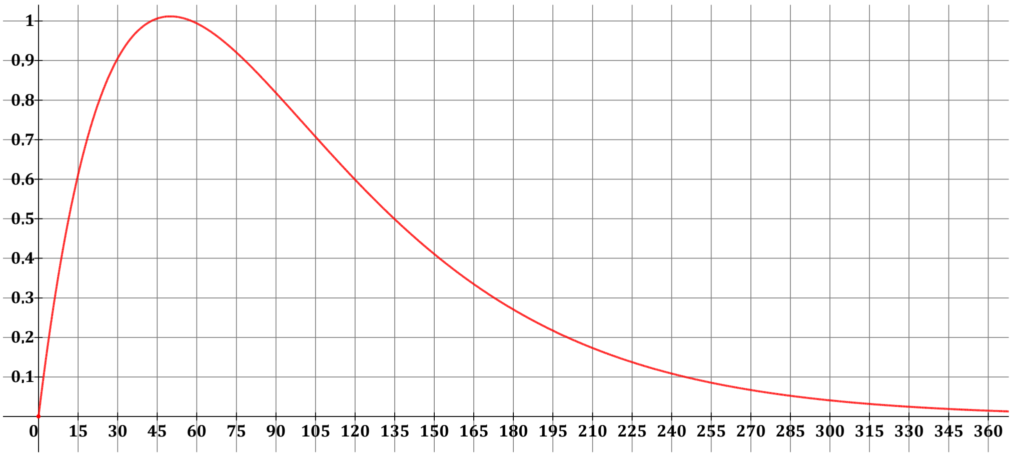
Partie B : Lectures graphiques
Une personne a ingéré une certaine quantité d'alcool. On s'intéresse à l'évolution du taux d'alcool dans le sang de cette personne, en fonction du temps t, en heures. Compte tenu du délai d'absorption par l'organisme, le taux d'alcool dans le sang de cette personne est donné par la fonction f définie sur [0,025 ; +∞[par
$f(t) = (2t - 0{,}05)e^{-t}$. La représentation graphique $\mathcal{C}_f$ de la fonction f dans un repère orthonormal est fournie ci-dessous.



▶ 1. Déterminer, à l'aide du graphique ci-dessus, pendant combien de temps le taux d'alcool dans le sang de cette personne reste supérieur à 0,5.
▶ 2. Déterminer, à l'aide du graphique, à quel instant le taux est maximum et donner ce maximum.
Partie C : Étude d'une fonction
▶ 1. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f. Montrer que
$$f'(t) = (2{,}05 - 2t)e^{-t}$$
▶ 2. Étudier le signe de $f'(t)$ et en déduire la valeur exacte du maximum de la fonction f.
▶ 3. On considère $T_m = \frac{1}{2}\int_2^4 f(t)dt$. T_m est le taux d'alcool moyen entre les instants $t = 2$ et $t = 4$. Calculer, à l'aide d'une IPP, la valeur exacte de T_m puis, en donner une valeur arrondie à 0,01 près.

Exercice 5. ★
Les médicaments antalgiques sont utilisés pour diminuer, voire stopper, une douleur. Un patient ingère un antalgique par voie orale. On s'intéresse à la quantité de médicament présente dans l'organisme du patient au cours du temps. L'instant $t = 0$ correspond au début de l'ingestion. On fait l'hypothèse qu'à l'instant t, exprimé en minute, la quantité de médicament, exprimée en gramme, est égale à
$f(t) = 0{,}055\, t\, e^{-0{,}02t}$ où $t \in [0; +\infty[$

▶ 1. Déterminer graphiquement l'instant à partir duquel la quantité de médicament redevient inférieure à 0,1 g. On fera apparaître les traits de construction utiles sur le graphique.



▶ 2. a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Interpréter cette limite.

b. Démontrer que, pour tout $t \in [0;+\infty[$, $f'(t) = 10^{-3}(55 - 1{,}1t)e^{-0{,}02t}$

c. Quelle est la quantité maximale de médicament atteinte et au bout de combien de temps ?

d. L'antalgique est efficace lorsque la quantité de médicament reste, en moyenne, supérieur à 0,5 g pendant 4 heures. Est-il efficace dans le cas présent ?

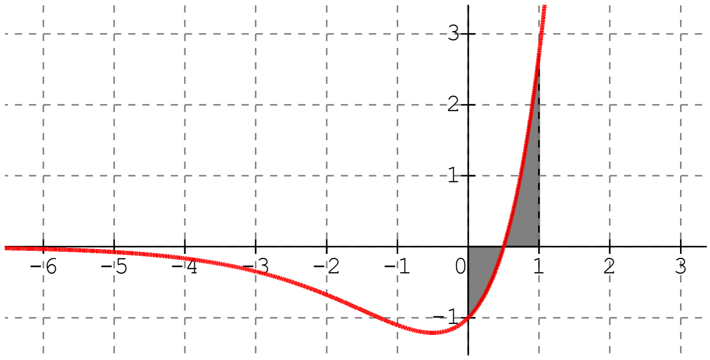
Correction des exercices

Correction de l'exercice 1. ★

Dans le repère ci-dessous, nous avons tracé la représentation graphique de la fonction, définie sur $\mathbb{R}$,

$$f(t) = (2t-1)e^t$$

Calculez l'intégrale représentée par l'aire coloriée.



Exercice 1.

L'intégrale représentée par l'aire coloriée est

$$\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 (2t-1)e^t dt = \int \boldsymbol{u'v}$$

$$u' = e^t \qquad u = e^t$$
$$v = 2t-1 \qquad v' = 2$$

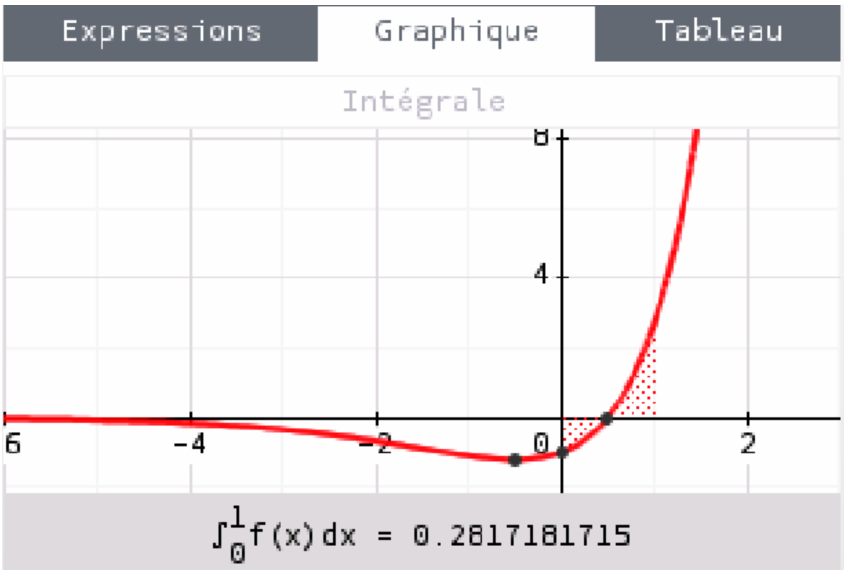
$$\int_0^1 f(t)dt = [\boldsymbol{u\,v}] - \int \boldsymbol{u\,v'} = [(2t-1)e^t]_0^1 - \int_0^1 2e^t dt$$

$$\int_0^1 f(t)dt = (2-1)e^1 - (0-1)e^0 - [2e^t]_0^1$$

$$\int_0^1 f(t)dt = e + 1 - (2e^1 - 2e^0)$$

$$\int_0^1 f(t)dt = e + 1 - 2e + 2$$

$$\int_0^1 f(t)dt = 3 - e \approx 0{,}2817$$



Correction de l'exercice 2. ★

A l'aide d'une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

$$I=\int_{-2}^{0}(2+x)e^{x}dx \qquad J=\int_{0}^{\pi/2}x\sin(x)\,dx \qquad K=\int_{1}^{e}x\ln(x)\,dx$$

Exercice 2.

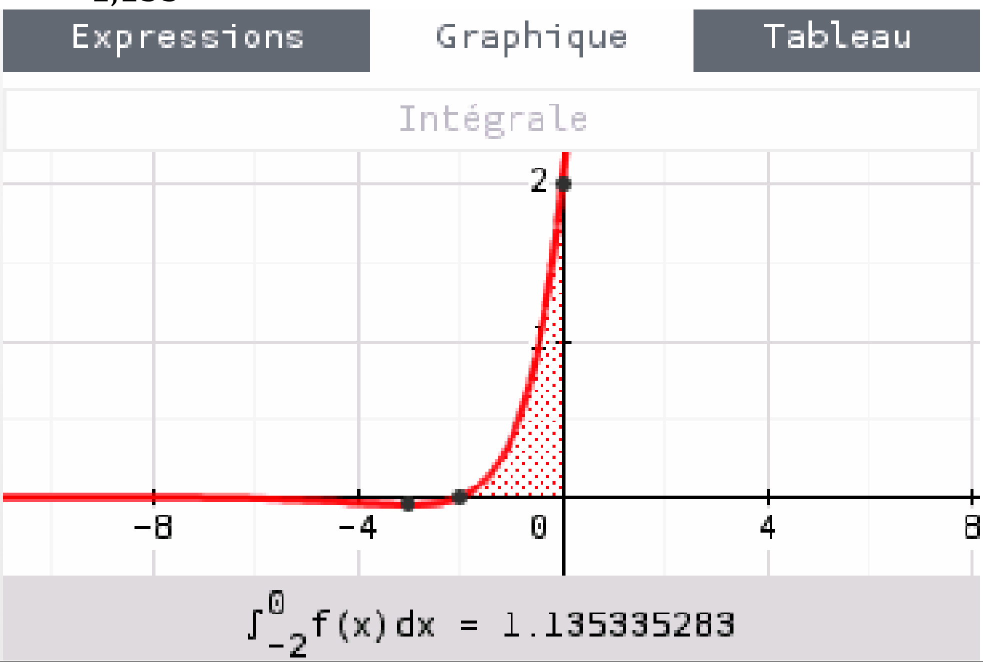
$$I=\int_{-2}^{0}(2+x)e^{x}dx=\int \boldsymbol{u'v}$$

$$u'=e^{x} \qquad u=e^{x}$$
$$v=2+x \qquad v'=1$$

$$I=[\boldsymbol{u\,v}]-\int \boldsymbol{u\,v'}=[(2+x)e^{x}]_{-2}^{0}-\int_{-2}^{0}1\times e^{x}dx$$

$$I=(2+0)e^{0}-(2-2)e^{-2}-\int_{-2}^{0}e^{x}dx$$

$$I=2-0-[e^{x}]_{-2}^{0}$$
$$I=2-(e^{0}-e^{-2})$$
$$I=2-1+e^{-2}$$
$$I=1+e^{-2}\approx 1{,}135$$



$$J = \int_0^{\pi/2} x \sin(x)\, dx = \boldsymbol{\int u' v}$$

$$u' = \sin(x) \quad u = -\cos(x)$$
$$v = x \quad v' = 1$$

$$J \boldsymbol{= [u\, v] - \int u\, v'} = [x(-\cos(x))]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 1 \times (-\cos(x)) dx$$

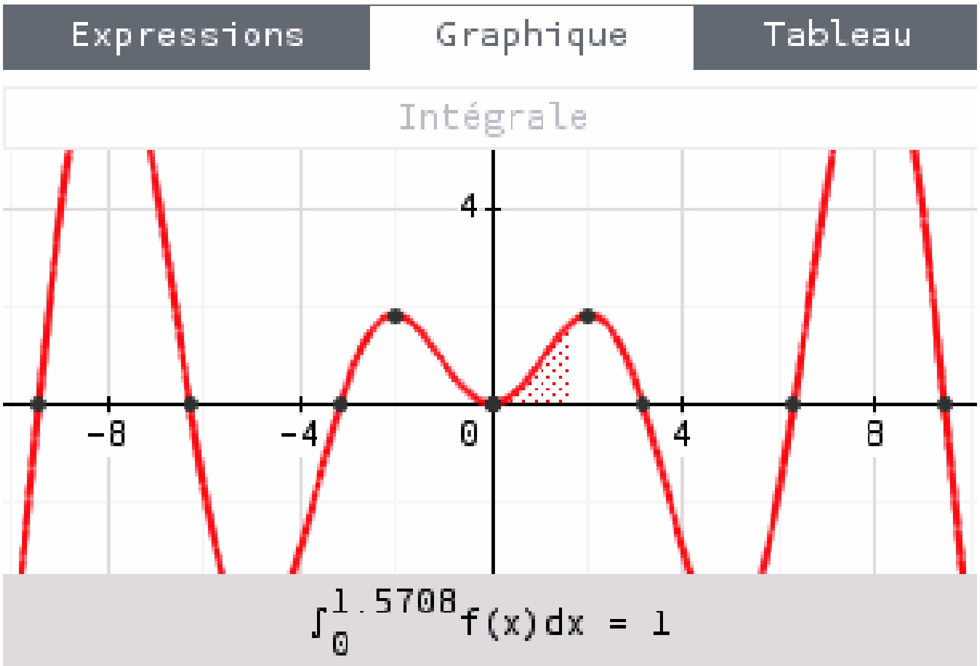
$$J = [-x\cos(x)]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos(x)\, dx$$

$$J = -\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - 0 + [\sin(x)]_0^{\pi/2}$$

$$J = 0 + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0)$$

$$J = 1 - 0$$

$$J = 1$$



$$K = \int_1^e x\ln(x)\,dx = \boxed{\int \boldsymbol{u'v}}$$

$$u' = x \qquad u = \frac{x^2}{2}$$

$$v = \ln(x) \qquad v' = \frac{1}{x}$$

$$K \boxed{= [\boldsymbol{u\,v}] - \int \boldsymbol{u\,v'}} = \left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}\times\frac{1}{x}\,dx$$

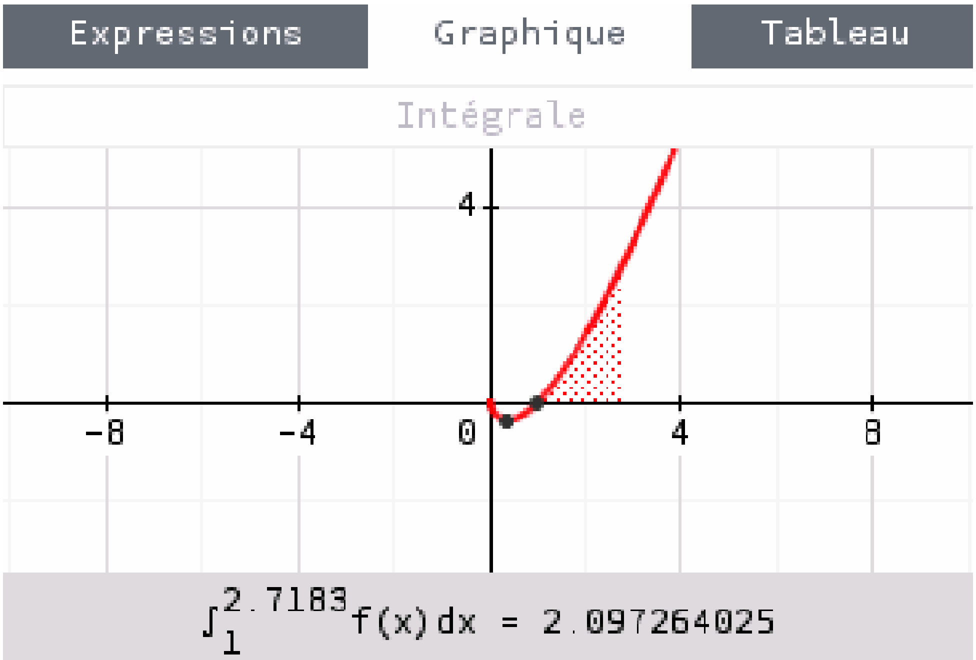
$$K = \frac{e^2}{2}\ln(e) - \frac{1^2}{2}\ln(1) - \int_1^e \frac{x}{2}\,dx$$

$$K = \frac{e^2}{2} - 0 - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e$$

$$K = \frac{e^2}{2} - \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1^2}{4}\right)$$

$$K = \frac{2e^2}{4} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$$

$$K = \frac{e^2+1}{4} \approx 2{,}097$$



Correction de l'exercice 3. ★

A l'aide d'une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^5 3xe^{-x}dx \qquad J = \int_0^{\pi/2} x\cos(x)\,dx \qquad K = \int_1^e \ln(x)\,dx$$

Exercice 3.

$$I = \int_0^5 3xe^{-x}dx = \int \boldsymbol{u'v}$$

$$u' = e^{-x} \quad u = -e^{-x}$$
$$v = 3x \quad v' = 3$$

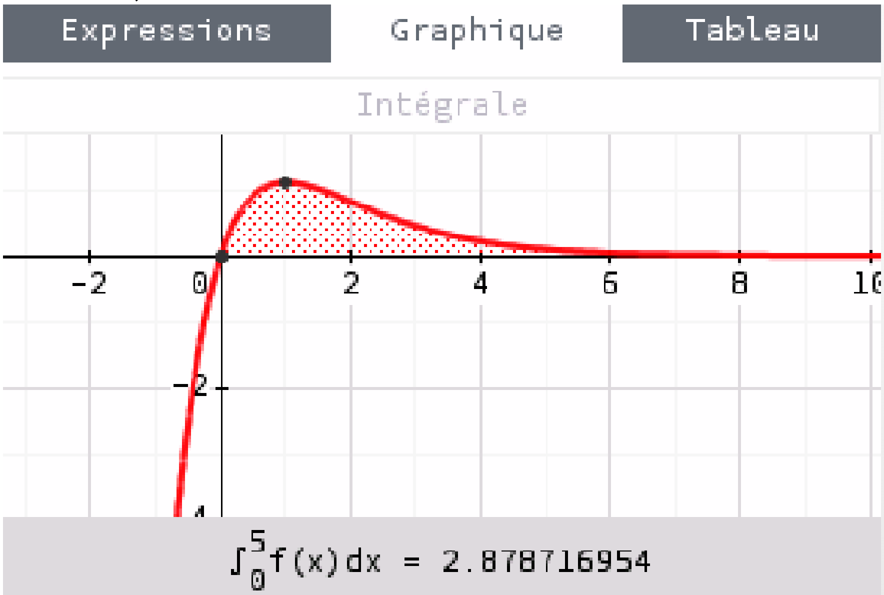
$$I = [\boldsymbol{u\,v}] - \int \boldsymbol{u\,v'} = [3x(-e^{-x})]_0^5 - \int_0^5 3(-e^{-x})dx$$

$$I = [-3xe^{-x}]_0^5 + \int_0^5 3e^{-x}dx$$

$$I = -3 \times 5e^{-5} + 0 + [3(-e^{-x})]_0^5$$

$$I = -15e^{-5} + (-3e^{-5} + 3e^{0})$$

$$I = -18e^{-5} + 3 \approx 2{,}8787$$



$$J = \int_0^{\pi/2} x\cos(x)\,dx = \int \boldsymbol{u'v}$$

$$u' = \cos(x) \quad u = \sin(x)$$
$$v = x \quad v' = 1$$

$$J = [\boldsymbol{u\,v}] - \int \boldsymbol{u\,v'} = [x\sin(x)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 1 \times \sin(x)\,dx$$

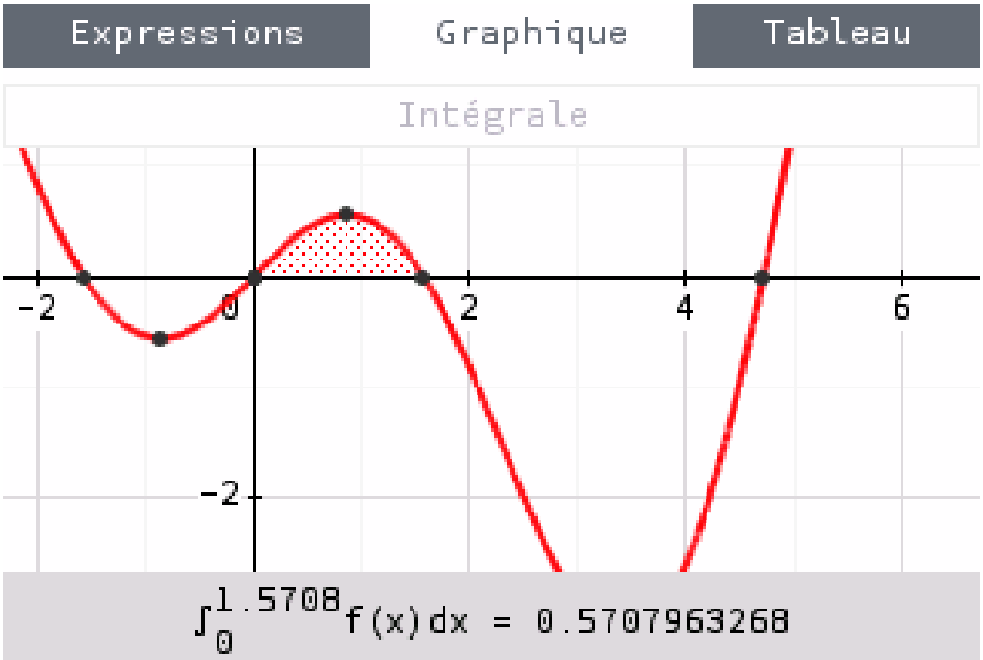
$$J = \frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - 0 - \int_0^{\pi/2} \sin(x)\,dx$$

$$J = \frac{\pi}{2} - [-\cos(x)]_0^{\pi/2}$$

$$J = \frac{\pi}{2} + [\cos(x)]_0^{\pi/2}$$

$$J = \frac{\pi}{2} + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos(0)$$

$$J = \frac{\pi}{2} - 1 \approx 0{,}571$$



$$K = \int_1^e \ln(x)\,dx = \int \boldsymbol{u'v}$$

$$u' = 1 \qquad u = x$$

$$v = \ln(x) \quad v' = \frac{1}{x}$$

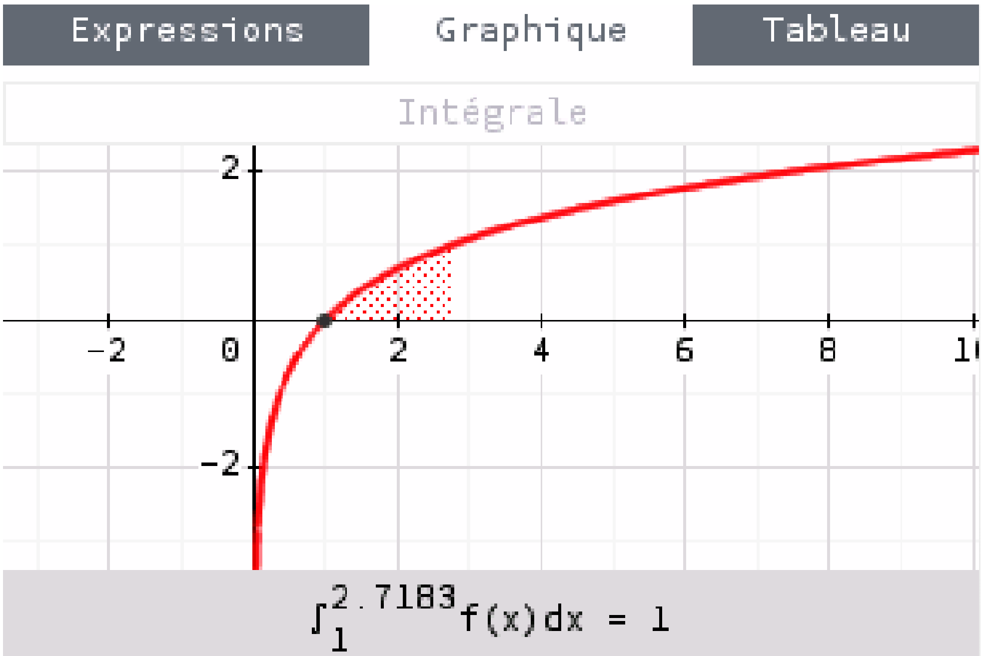
$$K = [\boldsymbol{u\,v}] - \int \boldsymbol{u\,v'} = [x\ln(x)]_1^e - \int_1^e x \times \frac{1}{x}dx$$

$$K = e\ln(e) - 1 \times \ln(1) - \int_1^e 1dx$$

$$K = e - 0 - [x]_1^e$$

$$K = e - (e - 1)$$

$$K = e - e + 1 = 1$$



Correction de l'exercice 4. ★

Dans une entreprise, lors d'une intervention sur la sécurité routière, on s'intéresse au taux d'alcool dans le sang.

Partie A : Taux d'alcool, deux exemples

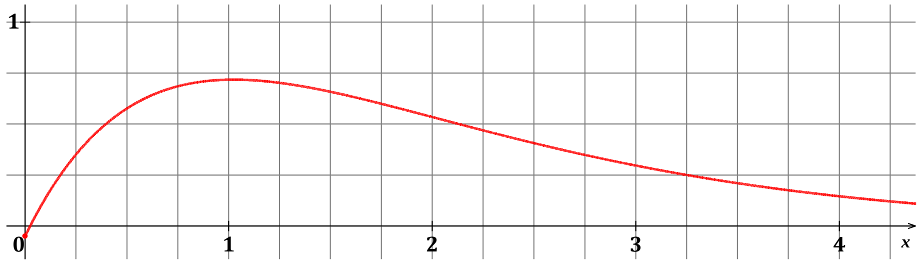
Le tableau donne les quantités d'alcool contenues dans certaines boissons alcoolisées.

Consommation	Quantité d'alcool (en g)
Un verre de 25 cL de bière	13 g
Un verre de 10 cL de vin	9 g
Une flûte de champagne	9 g
Un verre de 3 cL de whisky	13 g
Un verre de 5 cL d'apéritif	9 g

Environ une heure après ingestion, *on peut estimer* le taux d'alcool T dans le sang d'une personne, en fonction de son poids P, en kilogrammes, de la quantité d'alcool ingérée Q,

en grammes, et d'un coefficient de diffusion K, à l'aide de la formule suivante : $T = \frac{Q}{P \times K}$.
On admet que K=0,7 pour les hommes et que $K = 0{,}6$ pour une femme.
▶1. À l'aide de la formule, estimer le taux d'alcool dans le sang, environ une heure après ingestion, d'un homme de 75 kg ayant consommé un verre de 25 cL de bière, deux verres de 10 cL de vin et une flûte de champagne.
▶2. Estimer la quantité d'alcool ingérée par une femme de 60 kg dont le taux d'alcool mesuré est 0,5 une heure après ingestion.

Partie B : Lectures graphiques
Une personne a ingéré une certaine quantité d'alcool. On s'intéresse à l'évolution du taux d'alcool dans le sang de cette personne, en fonction du temps t, en heures. Compte tenu du délai d'absorption par l'organisme, le taux d'alcool dans le sang de cette personne est donné par la fonction f définie sur $[0{,}025\,;+\infty[$ par $f(t) = (2t - 0{,}05)e^{-t}$. La représentation graphique $\mathcal{C}_f$ de la fonction f dans un repère orthonormal est fournie ci-dessous.

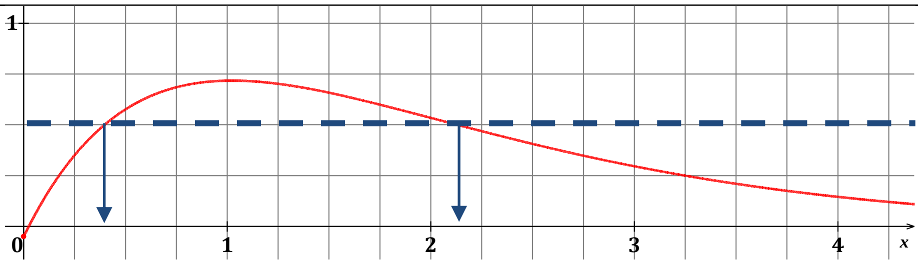


▶1. Déterminer, à l'aide du graphique ci-dessus, pendant combien de temps le taux d'alcool dans le sang de cette personne reste supérieur à 0,5.
▶2. Déterminer, à l'aide du graphique, à quel instant le taux est maximum et donner ce maximum.

Partie C : Étude d'une fonction
▶1. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f. Montrer que
$$f'(t) = (2{,}05 - 2t)e^{-t}$$
▶2. Étudier le signe de $f'(t)$ et en déduire la valeur exacte du maximum de la fonction f.
▶3. On considère $T_m = \frac{1}{2}\int_2^4 f(t)dt$. T_m est le taux d'alcool moyen entre les instants $t = 2$ et $t = 4$. Calculer, à l'aide d'une IPP, la valeur exacte de T_m puis, en donner une valeur arrondie à 0,01 près.

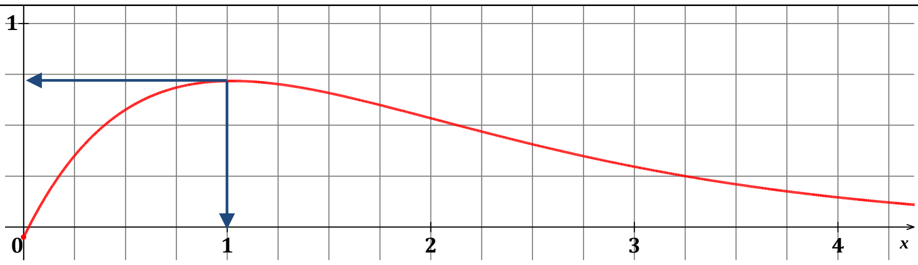
Exercice 4.	**A1.**	$T_1 = \dfrac{Q}{P \times K} = \dfrac{13 + 2 \times 9 + 9}{75 \times 0{,}7} = \dfrac{40}{52{,}5} \approx 0{,}76$
	A2.	$0{,}5 = \dfrac{Q}{60 \times 0{,}6} \Leftrightarrow Q = 0{,}5 \times 60 \times 0{,}6 = 18$ La femme a ingéré 18g d'alcool.

B1.



Le taux d'alcool dans le sang de cette personne reste supérieur à 0,5 de 0,4 heure à 2,2 heures soit 1,8 heure c'est-à-dire pendant 1h 48 minutes environ.

B2.



Le taux de cette personne est maximal au bout d'une heure et il vaut 0,7 environ.

C1.

$f(t) = (2t - 0{,}05)e^{-t} = (\boldsymbol{uv})$

$$u = 2t - 0{,}05 \qquad u' = 2$$
$$v = e^{-t} \qquad v' = -e^{-t}$$

$f'(t) = \boldsymbol{u'v + uv'} = 2\,e^{-t} - (2t - 0{,}05)e^{-t}$

$f'(t) = \ e^{-t}\big(2 - (2t - 0{,}05)\big)$

$f'(t) = \ e^{-t}(2 - 2t + 0{,}05)$

$f'(t) = \ e^{-t}(2{,}05 - 2t)$

C2.

$$f'(t) > 0$$
$$\Leftrightarrow \ e^{-t}(2{,}05 - 2t) > 0$$
$$\Leftrightarrow \ 2{,}05 - 2t > 0 \ \text{ car } e^{-t} > 0$$
$$\Leftrightarrow -2t > -2{,}05$$
$$\Leftrightarrow t < \frac{-2{,}05}{-2}$$
$$\Leftrightarrow t < 1{,}025$$

t	0		1,025		$+\infty$
$f'(t)$		+	0	−	
$f(t)$		$\nearrow$	0,718	$\searrow$	

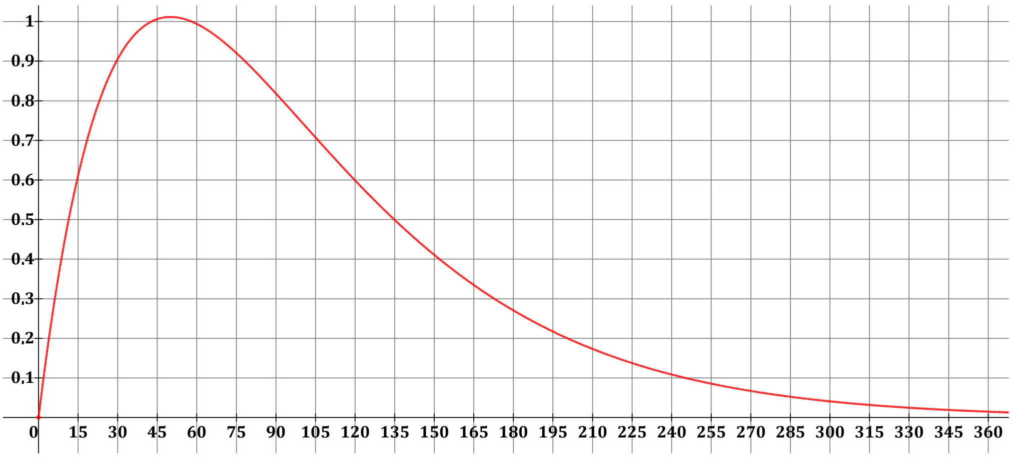
$f(1{,}025) = (2 \times 1{,}025 - 0{,}05)e^{-1{,}025} \approx 0{,}718$

	C3.	$T_m = \frac{1}{2}\int_2^4 f(t)dt = \frac{1}{2}\int_2^4 (2t-0{,}05)e^{-t}dt = \boxed{\int \boldsymbol{u'v}}$ $u' = e^{-t} \qquad u = -e^{-t}$ $v = 2t - 0{,}05 \qquad v' = 2$ $T_m = \boxed{[\boldsymbol{u\,v}] - \int \boldsymbol{u\,v'}} = \frac{1}{2}\left([(2t-0{,}05)(-e^{-t})]_2^4 - \int_2^4 2(-e^{-t})dt\right)$ $T_m = \frac{1}{2}\left([-(2t-0{,}05)e^{-t}]_2^4 + \int_2^4 2e^{-t}dt\right)$ $T_m = \frac{1}{2}(-(2\times 4 - 0{,}05)e^{-4} + (2\times 2 - 0{,}05)e^{-2} + [2(-e^{-t})]_2^4)$ $T_m = \frac{1}{2}(-7{,}95e^{-4} + 3{,}95e^{-2} + [-2e^{-t}]_2^4)$ $T_m = \frac{1}{2}(-7{,}95e^{-4} + 3{,}95e^{-2} - 2e^{-4} + 2e^{-2})$ $T_m = \frac{1}{2}(-9{,}95e^{-4} + 5{,}95e^{-2}) \approx 0{,}31$

Correction de l'exercice 5. ★

Les médicaments antalgiques sont utilisés pour diminuer, voire stopper, une douleur. Un patient ingère un antalgique par voie orale. On s'intéresse à la quantité de médicament présente dans l'organisme du patient au cours du temps. L'instant $t = 0$ correspond au début de l'ingestion. On fait l'hypothèse qu'à l'instant t, exprimé en minute, la quantité de médicament, exprimée en gramme, est égale à
$f(t) = 0{,}055\, t\, e^{-0{,}02t}$ où $t \in [0; +\infty[$

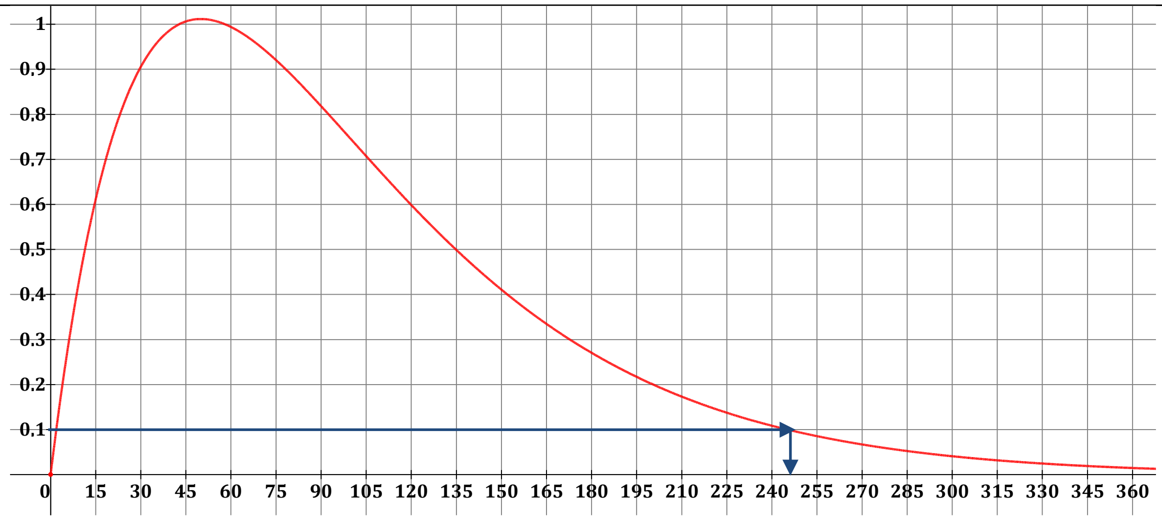
▶1. Déterminer graphiquement l'instant à partir duquel la quantité de médicament redevient inférieure à 0,1 g. On fera apparaître les traits de construction utiles sur le graphique.



▶2. a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Interpréter cette limite.
b. Démontrer que, pour tout $t \in [0; +\infty[$, $f'(t) = 10^{-3}(55 - 1{,}1t)e^{-0{,}02t}$
c. Quelle est la quantité maximale de médicament atteinte et au bout de combien de temps ?
d. L'antalgique est efficace lorsque la quantité de médicament reste, en moyenne, supérieur à 0,5 g pendant 4 heures. Est-il efficace dans le cas présent ?

Exercice 5.

1.



La quantité de médicament redevient inférieure à 0,1 g au bout de 245 minutes environ.

2a.

$$f(t) = 0{,}055\, t\, e^{-0{,}02t}$$

$\lim\limits_{t\to+\infty} -0{,}02t = -\infty$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-0{,}02t} = 0$

et donc $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$

Cela signifie qu'à très long terme, la quantité de médicament va tendre vers 0 c'est-à-dire disparaitre de l'organisme.

2b.

$f(t) = 0{,}055\, t\, e^{-0{,}02t} = \boldsymbol{(uv)}$

$$u = 0{,}055\, t \qquad u' = 0{,}055$$
$$v = e^{-0{,}02t} \qquad v' = -0{,}02e^{-0{,}02t}$$

$f'(t) = \boldsymbol{u'v + uv'} = 0{,}055\, e^{-0{,}02t} - 0{,}055\, t\, (-0{,}02e^{-0{,}02t})$

$f'(t) = 0{,}055\, e^{-0{,}02t} + 0{,}0011\, t\, e^{-0{,}02t}$

$f'(t) = (0{,}055 + 0{,}0011\, t\,)e^{-0{,}02t}$

$f'(t) = 10^{-3}(55 - 1{,}1t)e^{-0{,}02t}$

2c.

$$f'(t) > 0$$
$$\Leftrightarrow 10^{-3}(55 - 1{,}1t)e^{-0{,}02t} > 0$$
$$\Leftrightarrow\ 55 - 1{,}1t > 0 \ \text{ car }\ 10^{-3}e^{-0{,}02t} > 0$$
$$\Leftrightarrow -1{,}1t > -55$$
$$\Leftrightarrow t < \frac{-55}{-1{,}1}$$
$$\Leftrightarrow t < 50$$

t	0		50		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$	$1{,}012$	$\searrow$	

$$f(50) = 0{,}055 \times 50e^{-0{,}02\times 50} \approx 1{,}012$$

La quantité maximale de médicament est 1,012 g au bout de 50 minutes.

2d.

L'antalgique est efficace lorsque la quantité de médicament reste, en moyenne, supérieur à 0,5 g pendant 4 heures. Est-il efficace dans le cas présent ?

$$Q_m = \frac{1}{4\times 60}\int_0^{4\times 60} f(t)dt = \frac{1}{240}\int_0^{240} 0{,}055\; t\; e^{-0{,}02t}dt = \int \boldsymbol{u'v}$$

$$u' = e^{-0{,}02t} \qquad u = \frac{e^{-0{,}02t}}{-0{,}02}$$

$$v = 0{,}055t \qquad v' = 0{,}055$$

$$Q_m = [\boldsymbol{u\,v}] - \int \boldsymbol{u\,v'}$$

$$Q_m = \frac{1}{240}\left(\left[0{,}055t\left(\frac{e^{-0{,}02t}}{-0{,}02}\right)\right]_0^{240} - \int_0^{240} 0{,}055\times\frac{e^{-0{,}02t}}{-0{,}02}dt\right)$$

$$Q_m = \frac{1}{240}\left([-2{,}75t\; e^{-0{,}02t}]_0^{240} + \int_0^{240} 2{,}75e^{-0{,}02t}dt\right)$$

$$Q_m = \frac{1}{240}\left(-2{,}75\times 240\; e^{-0{,}02\times 240} - 0 + \left[\frac{2{,}75e^{-0{,}02t}}{-0{,}02}\right]_0^{240}\right)$$

$$Q_m = \frac{1}{240}(-660\; e^{-4{,}8} + [-137{,}5\; e^{-0{,}02t}]_0^{240})$$

$$Q_m = \frac{1}{240}(-660\; e^{-4{,}8} - 137{,}5e^{-0{,}02\times 240} + 137{,}5e^{-0{,}02\times 0})$$

$$Q_m = \frac{1}{240}(-660\; e^{-4{,}8} - 137{,}5\; e^{-4{,}8} + 137{,}5e^{0})$$

$$Q_m = \frac{1}{240}(-797{,}5\; e^{-4{,}8} + 137{,}5) \approx 0{,}546$$