Epreuve de Bernoulli

Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire qui ne comporte que deux issues : le succès ou l'échec. Le succès noté S a une probabilité p. Par conséquent, l'échec $\bar{S}$ a une probabilité $1-p$.

Exercice n°1. PISTE BLEUE
Dans un QCM, il y a trois questions indépendantes et pour chaque question, il y a quatre propositions dont une seule est juste. Un candidat décide de répondre au hasard. Quelle est la probabilité que le candidat donne la réponse juste à au moins deux questions sur trois ?

La loi Binomiale $X \hookrightarrow B(n;p)$

On répète n fois, de façon identique et indépendante, une alternative où la probabilité d'un succès est p. La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès obtenus, suit une loi binomiale de paramètres n et p. $\forall k \in \{0; 1; 2; \dots; n-1; n\}$, $P(X=k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$

La moyenne ou espérance est alors $\boldsymbol{E(X) = n \times p}$ et l'écart type $\boldsymbol{\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}}$.

$P(X=k)$	Non cumulative	binomFdp(n,p,k)
$P(X \leq k)$	Cumulative	binomFRép(n,p,k)

Exercice n°2. PISTE BLEUE
Une entreprise fabriquant des appareils électriques commande à un fournisseur 50 condensateurs. La probabilité qu'un condensateur soit défectueux est 0,02. Soit X la variable aléatoire qui, à un lot de 50 condensateurs associe le nombre de condensateurs défectueux.
Quelle est la probabilité qu'il n'y ait aucun condensateur défectueux dans le lot ?
qu'il y ait 10 condensateurs défectueux ?
qu'il y ait au moins un condensateur défectueux ?

Probabilités conditionnelles, indépendance

A et B sont deux événements avec $P(A) \neq 0$. La probabilité de l'événement B sachant A est définie par $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$. Deux événements A et B sont indépendants lorsque la réalisation ou non de B n'a pas d'influence sur la réalisation de A donc $P_B(A) = P(A)$ et $P_A(B) = P(B)$.
Deux **événements** A et B sont **indépendants** lorsque

$$\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)}$$

Exercice n°3. PISTE BLEUE
Dans un pays, il y a 2 % de la population contaminée par un virus. On dispose d'un test de dépistage de ce virus pour lequel la probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de 0,99 (sensibilité du test) et la probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de 0,97 (spécificité du test).
Calculer la probabilité que le test soit positif.
▶1. Peut-on affirmer que si le test est positif, il n'y a qu'environ 40 % de « chances » que la personne soit contaminée ?
▶2. Déterminer la probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif.

Exercice n°4. PISTE BLEUE
On tire des cartes dans un jeu de 32 cartes.
▶1. Quelle est la probabilité d'obtenir un as lorsque l'on tire une seule carte ?
▶2. On tire maintenant deux cartes, **avec remise** entre chaque carte tirée. Quelle est la probabilité d'obtenir deux as ? Quelle est la probabilité de n'obtenir aucun as ?
▶3. On tire deux cartes **avec remise** et on gagne 10 euros pour chaque as tiré, soit X la variable aléatoire donnant le gain du joueur. Déterminez la loi de X. Calculez son espérance. Si l'exploitant vous demande de miser 3 euros avant de jouer, allez-vous accepter de jouer longtemps ? Justifiez mathématiquement votre réponse.

Exercice n°5. PISTE BLEUE
On organise une compétition de tennis entre Pierre et Nathan. Le premier qui gagne deux parties remporte la compétition. On considère que Pierre a deux fois plus de chance de gagner une partie que Nathan.
▶1. Quelle est la probabilité que Nathan gagne une partie ?
▶2. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de parties jouées pour déterminer le vainqueur de la compétition. Déterminez la loi de X.

Exercice n°6. PISTE BLEUE
Une entreprise fabrique des pièces métalliques rectangulaires dont les cotes sont exprimées en millimètres. Un contrôle qualité consiste à vérifier que les cotes sont conformes à la norme en vigueur.
Partie A
On suppose que la probabilité de l'évènement E, la pièce est conforme est 0,9. On prélève au hasard 10 pièces dans le stock. Soit X qui, à tout prélèvement de 10 pièces, associe le nombre de pièces conformes parmi ces 10 pièces. Déterminer la loi de la variable aléatoire X. En déduire la probabilité que, dans un tel prélèvement, 8 pièces au moins soient conformes.
Partie B
Une seconde machine automatique fabrique également ces mêmes pièces en grande quantité. On suppose que la probabilité qu'une pièce prélevée au hasard dans la production d'une journée de la machine 1 soit conforme est $p_1 = 0{,}914$ et que la probabilité qu'une pièce choisie au hasard dans la production de la machine 2 soit conforme est $p_2 = 0{,}879$. La machine 1 fournit 60 % de la production totale de ces pièces. On prélève au hasard une pièce parmi la production totale de l'entreprise de la journée. Déterminer la probabilité que la pièce prise au hasard soit conforme.

Exercice n°7. PISTE BLEUE
Dans une usine, deux palettiseurs R_1 et R_2 sont chargés d'emballer les palettes de sucre. On sait que le palettiseur R_1 conditionne 60% de la production. Une étude statistique a montré que 1% des palettes provenant de la machine R_1 sont mal emballées et 2% des palettes provenant de la machine R_2 sont mal emballées. On prélève au hasard une palette à la sortie de la chaîne.
▶1. L'usine demande au service maintenance d'intervenir lorsque la probabilité que la palette tirée au hasard soit bien emballée est inférieure à 99%. Doit-on demander une intervention dans le cas présent ? Justifier votre réponse.
▶2. Sachant que la palette tirée au hasard est mal emballée,
a) quelle est la probabilité qu'elle ait été conditionnée par la machine R_1 ?
b) quelle est la probabilité qu'elle ait été conditionnée par la machine R_2 ?
c) Quelle machine la maintenance doit-elle régler en priorité ?