BTS La Loi Exponentielle
Fiche n° 1 1

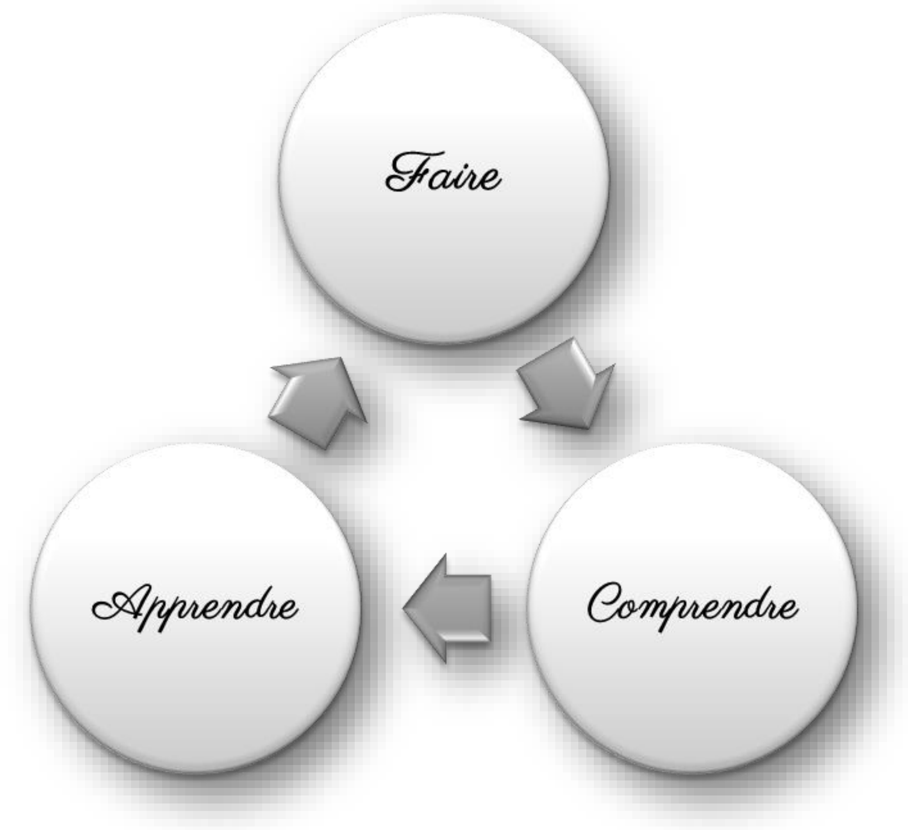
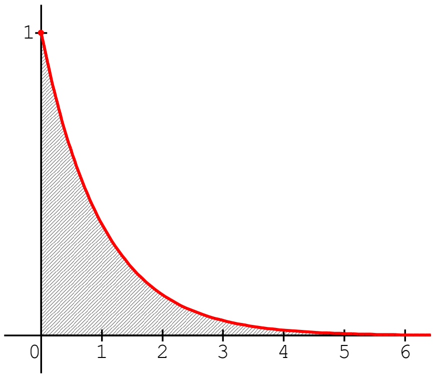


Table des matières

BTS La Loi Exponentielle
Fiche n° 1 1
Enoncé des exercices

Ce qu'il faut retenir :

Une loi exponentielle modélise la durée de vie d'un phénomène sans mémoire, ou sans vieillissement, ou sans usure. Le fait que le phénomène ait duré pendant t heures ne change rien à son espérance de vie à partir du temps t. Cette loi permet entre autres de modéliser la durée de vie d'un atome radioactif ou d'un composant électronique. Elle peut aussi être utilisée pour décrire par exemple le temps écoulé entre deux coups de téléphone reçus au bureau, ou le temps écoulé entre deux accidents de voiture dans lequel un individu donné est impliqué.



Soit $\lambda > 0$ une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre λ sur $[0;+\infty[$ lorsque sa densité de probabilité est la fonction $\forall x \in [0;+\infty[,\quad f(x) = \lambda\, e^{-\lambda x}$

On a alors : $E(T) = \frac{1}{\lambda}$

Exercice 1. ★

La durée de vie, en heures, d'un composant électronique est modélisée par la loi exponentielle d'espérance 2000. ***Quelle est la probabilité que l'un des composant pris au hasard, soit encore en état de marche au bout de 500 h ?***

Exercice 2. ★★

Partie A.

Soit $\lambda > 0$, démontrer que pour tout réel $t > 0$, $\displaystyle\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx = 1 - e^{-\lambda t}$.

Partie B.

Dans une entreprise, on étudie la durée de vie, exprimée en heures, d'une console de jeux vidéos.

▶1. On admet que la variable aléatoire X qui, à une console quelconque, associe sa durée de vie t exprimée en heures, suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}001$.

a) Quelle est l'espérance de X ? En donner une interprétation.

b) Quelle est la probabilité, arrondie à 10^{-3}, qu'une console fonctionne encore après 200 heures d'utilisation ?

▶2. Afin d'augmenter leur durée de vie, on décide d'équiper les nouvelles consoles d'un système permettant l'extinction automatique après plusieurs minutes de non utilisation. On admet que la variable aléatoire Y qui, à une nouvelle console, associe sa durée de vie t exprimée en heures, suit une loi exponentielle de paramètre μ.

a) Une étude statistique a permis d'évaluer $P(Y \leq 200) = 0{,}125$. Calculer la valeur arrondie à 10^{-5} de μ.

b) Quelle est la durée de vie moyenne de ces nouvelles ampoules ?

Exercice 3. ★

Un sismologue déclare : « Le risque d'un séisme majeur le long de la faille de San Andreas, en Californie, dans les vingt prochaines années est supérieur à 75% ».

On s'intéresse au temps, exprimé en années, écoulé entre deux séismes majeurs le long de cette faille en Californie. On admet que ce temps est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

Document : La faille de San Andreas (Californie) : séismes majeurs de magnitude supérieure ou égale à 5 :

Ville	Année	Magnitude
Comté d'Orange	1769	6
San Diego	1800	6,5
San Francisco	1808	6
Fort Tejon	1857	8,3
Monts Santa Cruz	1865	6,5
Hayward	1868	6,9
San Francisco	1906	8,2
Santa Barbara	1925	6,3
Santa Barbara	1927	7,3
Long Beach	1933	6,3
Comté de Kern	1952	7,7
San Francisco	1957	5,3
San Fernando	1971	6,6
LomaPrieta	1989	7,1
Parkfield	2004	6
Los Angeles	2008	5,5
Mexicali	2010	7,2
Napa	2014	6
Californie	2019	7,1
Californie	2019	6,4

Année	
1769	
1800	31
1808	8
1857	49
1865	8
1868	3
1906	38
1925	19
1927	2
1933	6
1952	19
1957	5
1971	14
1989	18
2004	15
2008	4
2010	2
2014	4
2019	5
2019	0
TOTAL	**250**

▶1. a) Calculer, en années, la **moyenne** m du temps écoulé entre deux séismes majeurs le long de la faille de San Andreas en Californie.

b) Justifier qu'une approximation du paramètre λ de la loi exponentielle suivie par la variable aléatoire X est 0,076.

▶2. a) Démontrer que $\int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda t}$.

b) Calculer $P(X \leq 20) = \int_0^{20} \lambda e^{-\lambda x} dx$ à 10^{-2} près.

c) L'affirmation du sismologue paraît-elle cohérente avec cette modélisation ?

▶3. a) Résoudre l'équation $1 - e^{-0{,}076t} = 0{,}95$.

b) Que représente le résultat trouvé à la question précédente ?

Exercice 4. ★

La durée de vie d'un atome d'un corps radioactif est modélisée par une variable aléatoire T suivant une loi exponentielle de paramètre λ.

▶1. a) On appelle demi-vie le nombre T tel que $P(X \leq T)$= $P(X > T)$. Montrer que $P(X \leq T) = \frac{1}{2}$ et en déduire le nombre T en fonction de λ.

b) Le plutonium 239 à une demi-vie de 24 000 ans. En déduire une valeur approchée du coefficient λ correspondant (l'unité de temps est l'année). Quelle est la probabilité qu'un atome de plutonium 239 ne soit pas encore désintégré après 40 000 ans ?

▶2. Le coefficient de la loi exponentielle de la durée de vie T d'un Atome d'iode 131 est égal à 0,086 jour^{-1}.

a) Calculer la demi-vie de l'iode 131 (en jours).

b) Calculer la probabilité qu'un atome d'iode 131 se désintègre :

- pendant les deux premières semaines d'observation
- pendant le premier mois (de 31 jours)

c) Quelle est la durée moyenne de désintégration d'un atome d'iode 131 ?

Correction des exercices

Correction de l'exercice 1. ★

La durée de vie, en heures, d'un composant électronique est modélisée par la loi exponentielle d'espérance 2000. ***Quelle est la probabilité que l'un des composant pris au hasard, soit encore en état de marche au bout de 500 h ?***

Exercice 1.	
	$$X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$$ $$E(X) = 2000 = \frac{1}{\lambda}$$ $$\Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2000} = 0{,}0005 \quad \text{donc } X \hookrightarrow \mathcal{E}(0{,}0005)$$ $P(X \geq 500) = \int_{500}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = \int_{500}^{+\infty} 0{,}0005\, e^{-0{,}0005\, x} dx$ $P(X \geq 500) = 1 - \int_{0}^{500} 0{,}0005\, e^{-0{,}0005\, x} dx$ $P(X \geq 500) = 1 - \left[\frac{0{,}0005\, e^{-0{,}0005\, x}}{-0{,}0005}\right]_0^{500}$ $P(X \geq 500) = 1 - [-\, e^{-0{,}0005\, x}]_0^{500}$ $P(X \geq 500) = 1 + [e^{-0{,}0005\, x}]_0^{500}$ $P(X \geq 500) = 1 + e^{-0{,}0005 \times 500} - e^0$ $P(X \geq 500) = 1 + e^{-0{,}25} - 1$ $$P(X \geq 500) = e^{-0{,}25} \approx 0{,}7788$$

Correction de l'exercice 2. ★★

Partie A.

Soit $\lambda > 0$, démontrer que pour tout réel $t > 0$, $\int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda t}$.

Partie B.

Dans une entreprise, on étudie la durée de vie, exprimée en heures, d'une console de jeux vidéos.

▶1. On admet que la variable aléatoire X qui, à une console quelconque, associe sa durée de vie t exprimée en heures, suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}001$.

a) Quelle est l'espérance de X ? En donner une interprétation.

b) Quelle est la probabilité, arrondie à 10^{-3}, qu'une console fonctionne encore après 200 heures d'utilisation ?

▶2. Afin d'augmenter leur durée de vie, on décide d'équiper les nouvelles consoles d'un système permettant l'extinction automatique après plusieurs minutes de non utilisation. On admet que la variable aléatoire Y qui, à une nouvelle console, associe sa durée de vie t exprimée en heures, suit une loi exponentielle de paramètre μ.

a) Une étude statistique a permis d'évaluer $P(Y \leq 200) = 0{,}125$. Calculer la valeur arrondie à 10^{-5} de μ.
b) Quelle est la durée de vie moyenne de ces nouvelles ampoules ?

Exercice 2.

A.

Soit $\lambda > 0$, pour tout réel $t > 0$,

$$\int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = \left[\frac{\lambda e^{-\lambda x}}{-\lambda}\right]_0^t$$

$$\int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t$$

$$\int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda t} + e^0$$

$$\int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda t}$$

B1a.

$$X \hookrightarrow \mathcal{E}(0{,}001)$$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0{,}001} = 1000$$

La durée de vie moyenne d'une console de jeux vidéos est 1000 heures.

B1b.

$$P(X \geq 200) = \int_{200}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = \int_{200}^{+\infty} 0{,}001\, e^{-0{,}001\, x} dx$$

$$P(X \geq 200) = 1 - \int_0^{200} 0{,}001\, e^{-0{,}001\, x} dx$$

$$P(X \geq 200) = 1 - (1 - e^{-0{,}001 \times 200})$$

$$P(X \geq 200) = 1 - 1 + e^{-0{,}2}$$

$$P(X \geq 200) = e^{-0{,}2} \approx 0{,}819$$

B2a.

$$Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\mu)$$

$$P(Y \leq 200) = 0{,}125$$

$$\int_0^{200} \mu e^{-\mu x} dx = 0{,}125$$

$$\Leftrightarrow 1 - e^{-200\mu} = 0{,}125$$

$$\Leftrightarrow -e^{-200\mu} = 0{,}125 - 1$$

$$\Leftrightarrow -e^{-200\mu} = -0{,}875$$

$$\Leftrightarrow e^{-200\mu} = 0{,}875$$

$$\Leftrightarrow -200\mu = \ln(0{,}875)$$

$$\Leftrightarrow \mu = \frac{\ln(0{,}875)}{-200} \approx 0{,}00067$$

B2b.

$$E(Y) = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{0{,}00067} \approx 1493 \text{ heures}$$

Correction de l'exercice 3. ★

Un sismologue déclare : « Le risque d'un séisme majeur le long de la faille de San Andreas, en Californie, dans les vingt prochaines années est supérieur à 75% ».

On s'intéresse au temps, exprimé en années, écoulé entre deux séismes majeurs le long de cette faille en Californie. On admet que ce temps est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

Document : La faille de San Andreas (Californie) : séismes majeurs de magnitude supérieure ou égale à 5 :

Ville	Année	Magnitude
Comté d'Orange	1769	6
San Diego	1800	6,5
San Francisco	1808	6
Fort Tejon	1857	8,3
Monts Santa Cruz	1865	6,5
Hayward	1868	6,9
San Francisco	1906	8,2
Santa Barbara	1925	6,3
Santa Barbara	1927	7,3
Long Beach	1933	6,3
Comté de Kern	1952	7,7
San Francisco	1957	5,3
San Fernando	1971	6,6
LomaPrieta	1989	7,1
Parkfield	2004	6
Los Angeles	2008	5,5
Mexicali	2010	7,2
Napa	2014	6
Californie	2019	7,1
Californie	2019	6,4

Année	
1769	
1800	31
1808	8
1857	49
1865	8
1868	3
1906	38
1925	19
1927	2
1933	6
1952	19
1957	5
1971	14
1989	18
2004	15
2008	4
2010	2
2014	4
2019	5
2019	0
TOTAL	**250**

▶1. a) Calculer, en années, la **moyenne** m du temps écoulé entre deux séismes majeurs le long de la faille de San Andreas en Californie.

b) Justifier qu'une approximation du paramètre λ de la loi exponentielle suivie par la variable aléatoire X est 0,076.

▶2. a) Démontrer que $\int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda t}$.

b) Calculer $P(X \leq 20) = \int_0^{20} \lambda e^{-\lambda x} dx$ à 10^{-2} près.

c) L'affirmation du sismologue paraît-elle cohérente avec cette modélisation ?

▶3. a) Résoudre l'équation $1 - e^{-0{,}076t} = 0{,}95$.

b) Que représente le résultat trouvé à la question précédente ?

Exercice 3.	**1a.**	La **moyenne** m du temps écoulé entre deux séismes majeurs le long de la faille de San Andreas en Californie est $m = \frac{250}{19} \approx 13{,}158$ ans
	1b.	$X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ $E(X) = 13{,}158 = \frac{1}{\lambda}$ $\Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{13{,}158} \approx 0{,}076$ donc $X \hookrightarrow \mathcal{E}(0{,}076)$
	2a.	$\int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = \left[\frac{\lambda e^{-\lambda x}}{-\lambda}\right]_0^t$ $\int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t$ $\int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda t} + e^0$ $\int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda t}$
	2b.	$P(X \leq 20) = \int_0^{20} \lambda e^{-\lambda x} dx$ $P(X \leq 20) = 1 - e^{-20\times 0{,}076}$ $P(X \leq 20) = 1 - e^{-1{,}52} \approx 0{,}78$
	2c.	L'affirmation du sismologue est cohérente avec cette modélisation car la probabilité vaut 78%.
	3a.	$1 - e^{-0{,}076t} = 0{,}95$ $\Leftrightarrow -e^{-0{,}076t} = 0{,}95 - 1$ $\Leftrightarrow -e^{-0{,}076t} = -0{,}05$ $\Leftrightarrow e^{-0{,}076t} = 0{,}05$ $\Leftrightarrow -0{,}076t = \ln(0{,}05)$ $\Leftrightarrow t = \frac{\ln(0{,}05)}{-0{,}076} \approx 39{,}4$
	3b.	$0{,}95 = 1 - e^{-0{,}076t} = \int_0^t 0{,}076 e^{-0{,}076x} dx = P(X \leq t)$ ***Le risque d'un séisme majeur le long de la faille de San Andreas, en Californie, dans les 39 ½ prochaines années est d'environ 95%.***

Correction de l'exercice 4. ★

La durée de vie d'un atome d'un corps radioactif est modélisée par une variable aléatoire T suivant une loi exponentielle de paramètre λ.

▶ 1. a) On appelle demi-vie le nombre T tel que $P(X \leq T)$= $P(X > T)$. Montrer que $P(X \leq T) = \frac{1}{2}$ et en déduire le nombre T en fonction de λ.

b) Le plutonium 239 à une demi-vie de 24 000 ans. En déduire une valeur approchée du coefficient λ correspondant (l'unité de temps est l'année). Quelle est la probabilité qu'un atome de plutonium 239 ne soit pas encore désintégré après 40 000 ans ?

▶2. Le coefficient de la loi exponentielle de la durée de vie T d'un Atome d'iode 131 est égal à 0,086 jour^{-1}.

a) Calculer la demi-vie de l'iode 131 (en jours).

b) Calculer la probabilité qu'un atome d'iode 131 se désintègre :
- pendant les deux premières semaines d'observation
- pendant le premier mois (de 31 jours)

c) Quelle est la durée moyenne de désintégration d'un atome d'iode 131 ?

Exercice 4.	**1a.**	$P(X \leq T) = P(X > T)$ or $P(X \leq T) + P(X > T) = 1$ $$\text{donc } P(X \leq T) + P(X \leq T) = 1$$ $$2P(X \leq T) = 1$$ $$P(X \leq T) = \frac{1}{2}$$
		$$T \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$$ $P(X \leq T) = \int_0^T \lambda e^{-\lambda x} dx$ $P(X \leq T) = \left[\frac{\lambda e^{-\lambda x}}{-\lambda}\right]_0^T$ $P(X \leq T) = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^T$ $P(X \leq T) = -e^{-\lambda T} + e^0$ $$P(X \leq T) = 1 - e^{-\lambda T} = 0{,}5$$ $$\Leftrightarrow -e^{-\lambda T} = -0{,}5$$ $$\Leftrightarrow e^{-\lambda T} = 0{,}5$$ $$\Leftrightarrow -\lambda T = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$ $$\Leftrightarrow -\lambda T = -\ln(2)$$ $$\Leftrightarrow T = \frac{-\ln(2)}{-\lambda}$$ $$\Leftrightarrow T = \frac{\ln(2)}{\lambda}$$
	1b.	$$T = 24000$$ $$24000 = \frac{\ln(2)}{\lambda}$$ $$\Leftrightarrow 24000\lambda = \ln(2)$$ $$\Leftrightarrow \lambda = \frac{\ln(2)}{24000} \approx 2{,}888 \times 10^{-5}$$

		$P(X \geq 40000) = \int_{40000}^{+\infty} 2{,}888 \times 10^{-5} e^{-2{,}888x \times 10^{-5}} dx$ $P(X \geq 40000) = 1 - \int_{0}^{40000} 2{,}888 \times 10^{-5} e^{-2{,}888x \times 10^{-5}} dx$ $P(X \geq 40000) = 1 + \left[e^{-2{,}888x \times 10^{-5}}\right]_0^{40000}$ $P(X \geq 40000) = 1 + e^{-2{,}888 \times 40000 \times 10^{-5}} - e^0$ $P(X \geq 40000) = 1 + e^{-1{,}1552} - 1$ $P(X \geq 40000) = e^{-1{,}1552} \approx 0{,}315$
	2a.	$T \hookrightarrow \mathcal{E}(0{,}086)$ $T = \dfrac{\ln(2)}{\lambda} = \dfrac{\ln(2)}{0{,}086} \approx 8{,}1 \text{ jours}$
	2b.	$P(T \leq 14) = \int_{0}^{14} 0{,}086 e^{-0{,}086x} dx$ $P(T \leq 14) = \left[\dfrac{0{,}086 e^{-0{,}086x}}{-0{,}086}\right]_0^{14}$ $P(T \leq 14) = \left[-e^{-0{,}086x}\right]_0^{14}$ $P(T \leq 14) = -e^{-0{,}086 \times 14} + e^0$ $P(T \leq 14) = -e^{-1{,}204} + 1 \approx 0{,}7$
		$P(T \leq 31) = \int_{0}^{31} 0{,}086 e^{-0{,}086x} dx$ $P(T \leq 31) = \left[\dfrac{0{,}086 e^{-0{,}086x}}{-0{,}086}\right]_0^{31}$ $P(T \leq 31) = \left[-e^{-0{,}086x}\right]_0^{31}$ $P(T \leq 31) = -e^{-0{,}086 \times 31} + e^0$ $P(T \leq 31) = -e^{-2{,}666} + 1 \approx 0{,}93$
	2c.	$T \hookrightarrow \mathcal{E}(0{,}086)$ $E(T) = \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{0{,}086} \approx 11{,}63 \text{ jours}$