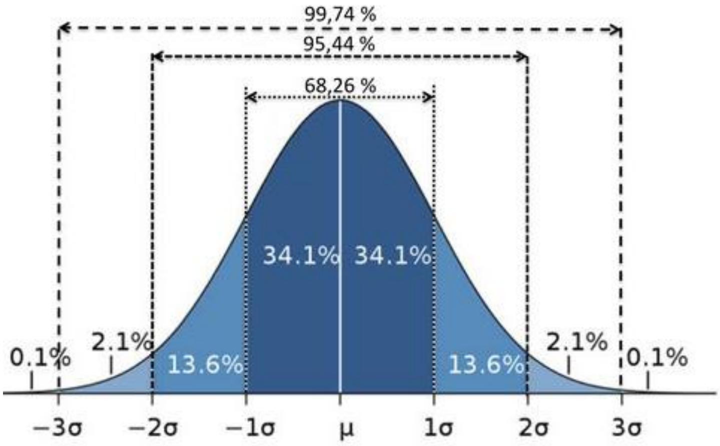
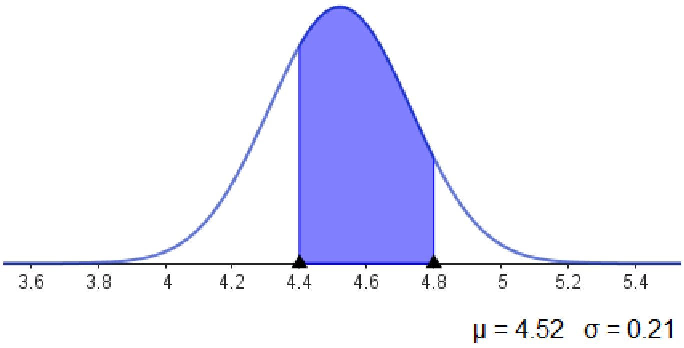
Loi normale

Si une variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ notée $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$, alors on a $E(X)=\mu$ et $\sigma(X)=\sigma$, ainsi que :

$$P(\mu-\sigma\leq X\leq\mu+\sigma)\approx 0{,}68$$
$$P(\mu-2\sigma\leq X\leq\mu+2\sigma)\approx 0{,}95$$
$$P(\mu-3\sigma\leq X\leq\mu+3\sigma)\approx 0{,}997$$



Exercice n°1. PISTE BLEUE

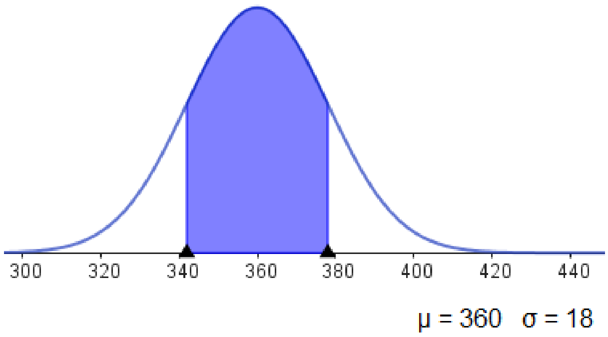


Le cahier des charges de l'usinage d'une tige prévoit pour sa longueur, en cm, l'intervalle de tolérance [4,40 ; 4,80]. Le service qualité constate qu'un premier lot de tiges fabriquées correspond à une distribution normale de moyenne 4,52 cm et d'écart –type 0,21 cm.

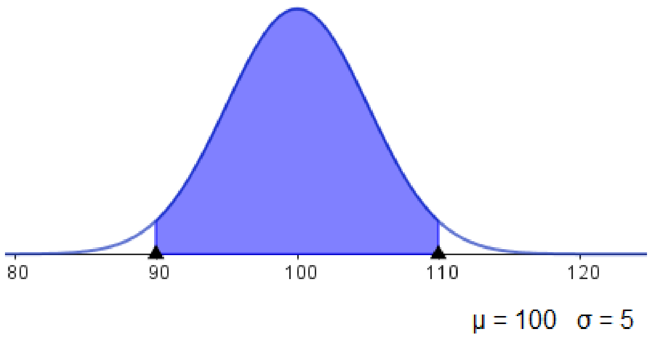
Quelle est la probabilité qu'une pièce prise au hasard dans ce lot, soit acceptable ?

Exercice n°2. PISTE BLEUE

Un particulier souhaite acheter, auprès d'un producteur, des bottes de paille pour l'isolation de sa maison. On prélève au hasard une botte de paille dans la production du 20 juillet 2011.



▶1. On note X la variable aléatoire qui, à chaque botte ainsi prélevée, associe son épaisseur exprimée en millimètres. On admet que X suit la loi normale de moyenne 360 et d'écart type 18. Calculer la probabilité $P(342\leq X\leq 378)$.



▶2. On note Y la variable aléatoire qui, à chaque botte prélevée dans la production de cette journée, associe sa densité exprimée en kg/m³. On admet que Y suit la loi normale de moyenne 100 et d'écart type 5. Calculer la probabilité qu'une botte prélevée dans la production de cette journée ait une densité comprise entre 90 kg/m³ et 110 kg/m³.

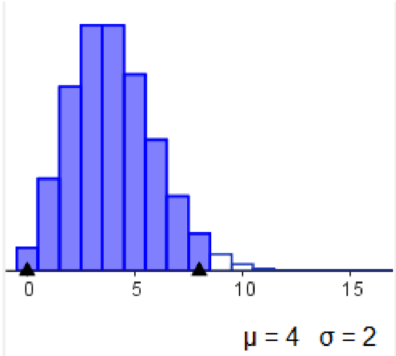
Loi de Poisson

On appelle loi de Poisson de paramètre λ, la loi de la variable aléatoire X telle que $\forall k\in\mathbb{N}$,

$P(X=k)=e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$. On a alors $E(X)=\lambda$ et $\sigma(X)=\sqrt{\lambda}$.

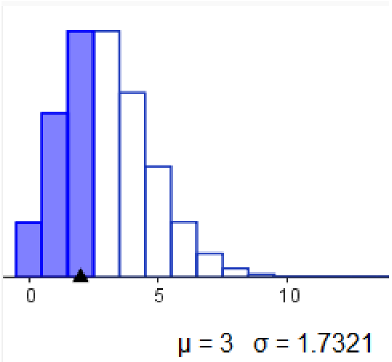
$P(X=k)$	Non cumulative	poissonFdp(λ,k)
$P(X\leq k)$	Cumulative	poissonFRép(λ,k)

Exercice n°3. PISTE BLEUE



Dans une usine, les accidents sont isolés, indépendants les uns des autres et se produisent à une cadence fixe. On peut alors modéliser le nombre d'accidents pendant un temps donné par une loi de Poisson. Il se produit en moyenne 4 accidents par mois. Notons X le nombre d'accidents par mois.

Donner $E(X)$ puis déterminer $P(X = 0)$ et $P(0 \leq X \leq 8)$.



Exercice n°4. PISTE BLEUE

Dans une verrerie, on fabrique des abat-jours en verre qui admettent en moyenne trois défauts. La probabilité du nombre de défauts par abat-jour est déterminée par une loi de Poisson. Calculer la probabilité :

a) pour qu'un abat-jour soit sans défaut ;

b) pour qu'un abat-jour contienne deux défauts au plus.

Exercice n°5. PISTE BLEUE

Partie A. Vérification d'un lot

Dans un stock important de verres à pied, on en prélève 20 au hasard pour vérification. Le stock est assez important pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 20 verres. On considère la variable aléatoire X qui à tout prélèvement de 20 verres associe le nombre de verres défectueux. On suppose que la probabilité qu'un verre soit défectueux est de $p = 0{,}069$.

►1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

►2. Calculer à 10^{-2} près la probabilité de l'évènement « dans un tel prélèvement cinq verres au plus sont défectueux ».

Partie B. Machine en panne

Dans cette usine, les pannes sont isolées, indépendantes les unes des autres et se produisent à une cadence fixe. On peut alors modéliser le nombre de panne pendant un temps donné par une loi de Poisson. Il se produit en moyenne 2 pannes par mois. Notons Y le nombre de pannes par mois.

Donner $E(Y)$ puis déterminer $P(Y = 0)$ et $P(Y \geq 4)$.

Partie C. Diamètre du buvant du verre

Dans cette question on s'intéresse au diamètre, exprimé en millimètre, d'ouverture du verre appelée « buvant » du verre. On note D la variable aléatoire qui à chaque verre associe le diamètre de son « buvant ». On admet que D suit la loi normale de paramètres $m = 46$ et $\sigma = 0{,}3$. On prélève au hasard un verre dans la production. Calculer à 10^{-2} près la probabilité que le diamètre de ce verre soit compris entre 45,8 et 46,3.

Partie D. Brillance des verres

La brillance des verres est contrôlée par un dispositif électronique qui analyse les reflets du verre. La durée de bon fonctionnement de ce dispositif, exprimée en mois, est modélisée par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.

Ainsi, pour tout réel t positif, la probabilité que le dispositif ait un temps de bon fonctionnement inférieur ou égal à t mois, est donnée par :

$$P(T \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx.$$

►1. Sachant que $P(T \leq 24) = 0{,}93$, montrer que la valeur arrondie au centième de λ est 0,11.

►2. Quelle est l'espérance de la durée de bon fonctionnement de ce dispositif ?

On arrondira à l'unité et on interprétera le résultat.

►3. La probabilité que la durée de vie soit supérieure à 4 ans est-elle supérieure à 1% ? Justifier.