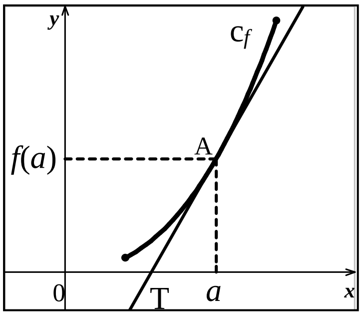
LA DERIVATION

① Interprétation géométrique :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et c_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal. Soit a un nombre l'intervalle I, le point A est le point de la courbe d'abscisse a. On suppose que la courbe c_f admet en A une tangente T non parallèle à l'axe des ordonnées :

On appelle **nombre dérivé** de f en a le **coefficient directeur de la tangente** T à la courbe c_f au point A $(a, f(a))$.
Ce nombre dérivé est noté $f'(a)$ et on dit que f est dérivable en a.



② Dérivées des fonctions usuelles :

Fonction f	**Dérivée f'**
$f(t) = a$ un nombre réel constant	$f'(t) = 0$
$f(t) = t^{\alpha}$	$f'(t) = \alpha t^{\alpha-1}$
$f(t) = \sqrt{t}$	$f'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$
$f(t) = \dfrac{1}{t}$	$f'(t) = \dfrac{-1}{t^2}$
$f(t) = \ln(t)$	$f'(t) = \dfrac{1}{t}$

Fonction f	**Dérivée f'**
$f(t) = \sin(t)$	$f'(t) = \cos(t)$
$f(t) = \cos(t)$	$f'(t) = -\sin(t)$
$f(t) = \tan(t)$	$f'(t) = 1 + \tan^2 t = \dfrac{1}{\cos^2 t}$
$f(t) = \sqrt{u}$	$f'(t) = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
$f(t) = e^t$	$f'(t) = e^t$

③ Règles de dérivation :

u et v désignent deux fonctions dérivables sur un intervalle I, k est une constante et α un réel.

$$(u+v)' = u' + v'$$
$$(ku)' = k \times u'$$
$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(e^u)' = e^u \times u'$$
$$(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$$
$$(u^{\alpha})' = \alpha u^{\alpha-1} u'$$

④ Application de la dérivée :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et f' sa fonction dérivée.

Théorème. Variations d'une fonction et extremum

- Si, pour tout nombre réel x de I, on a $f'(x) > 0$ alors f est **strictement croissante** sur I.
- Si, pour tout nombre réel x de I, on a $f'(x) < 0$ alors f est **strictement décroissante** sur I.
- Si, pour tout nombre réel x de I, on a $f'(x) = 0$ alors f est **constante** sur I.
- Si, pour la valeur a de I, la dérivée s'annule en changeant de signe alors la fonction f admet un **maximum local** ou un **minimum local**.

Théorème des valeurs intermédiaires :

Soit f une fonction **continue** sur un intervalle I, pour tout nombre réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$,
il existe au moins un nombre réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.
(On admet que ce théorème reste vrai lorsqu'au moins l'une des bornes de l'intervalle est infinie)