Définitions :

L'ensemble des **nombres complexes**, noté $\mathbb{C}$, est l'ensemble des nombres de la forme $\mathbf{z = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{ib}}$ où $a, b \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{i^2 = -1}$.

La notation $\mathrm{z} = a + ib$ s'appelle la **forme algébrique** du nombre complexe z.

$\bar{z} = \boldsymbol{a - ib}$ est le **conjugué** du nombre complexe $z = a + ib$

Exemple 1 :

On pose $z_1 = 3 + 2i$ et $z_2 = 5 - 4i$,

calculer $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$ et $z_1 \times z_2$ et $\frac{z_1}{z_2}$.

Théorème :

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$, l'équation $\boldsymbol{az^2 + bz + c = 0}$, de discriminant $\Delta = \boldsymbol{b^2 - 4ac}$ admet dans $\mathbb{C}$:

- si $\Delta = 0$, une unique solution $z = \frac{-b}{2a}$
- si $\Delta \neq 0$, deux solutions
  - réelles si $\Delta > 0$, $\boldsymbol{z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}$ et $\boldsymbol{z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}$
  - complexes conjuguées si $\Delta < 0$, $\boldsymbol{z_1 = \frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a}}$ et $\boldsymbol{z_2 = \frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}}$

Exemple 2 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$

Définition :

Le plan étant rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$,

$z = a + ib$ est **l'affixe du point** $M(a; b)$ et du vecteur $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

$\boldsymbol{z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A}$ est **l'affixe du vecteur** $\overrightarrow{AB}$

Exemple 3 :

On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives : $z_A = 3 + 2i$, $z_B = -1 + i$, $z_c = 1 - i$ et $z_D = 5$.

Que peut-on dire du quadrilatère $ABCD$?

Rappel : Module : $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{i}\boldsymbol{b}| = \sqrt{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2}$

Argument : $\left(\vec{\boldsymbol{u}}, \overrightarrow{\mathbf{OM}}\right) = \boldsymbol{\theta} + 2\boldsymbol{k\pi} = \boldsymbol{\theta}\ [2\boldsymbol{\pi}]$

$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) = [|z|, \theta]$ est la **forme trigonométrique**.

Méthode : $\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{z}|} = \dfrac{\text{partie réelle}}{\text{module}} \\ \sin(\theta) = \dfrac{\boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{z}|} = \dfrac{\text{partie imaginaire}}{\text{module}} \end{cases}$

Exemple 4 :

① Donner la forme trigonométrique de $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$.

② Donner la forme algébrique du nombre complexe z_2 de module 2 et d'argument $\frac{\pi}{4}$.

Définition :

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ $\boldsymbol{\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}}$

$e^{i\theta}$ désigne le nombre complexe de module 1 et dont un argument est θ.

Exemple 5 :

$e^{i0} = \cdots$ $e^{i\pi} = \cdots$

$e^{\frac{i\pi}{2}} = \cdots$ $e^{\frac{-i\pi}{2}} = \cdots$

$e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cdots$ $2e^{-i\frac{\pi}{4}} = \cdots$

$8e^{\frac{-5\pi}{6}i} = \cdots$

Définition :

Une **forme exponentielle** du nombre complexe z est $z = |z|e^{i\theta}$ où θ est un argument de z.

Propriétés : Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et $\theta' \in \mathbb{R}$

$$\boldsymbol{e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}} \qquad \boldsymbol{\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}} \qquad \boldsymbol{\frac{e^{i\theta'}}{e^{i\theta}} = e^{i(\theta'-\theta)}}$$

Exemple 6 :

On pose $z_1 = 2 - 2i$, $z_2 = i - \sqrt{3}$ et $z_3 = \bar{z}_2$

Donner la forme exponentielle de z_1, z_2 et z_3.

En déduire la forme exponentielle de $z_1 \times z_2$ et $\frac{z_1}{z_3}$.