Chap 6. Probabilités conditionnelles
BTS MS1

I. Schéma de Bernoulli

Blaise Pascal (1623 - 1662)

Mathématicien, physicien, philosophe, moraliste et théologien français, il publie un traité de géométrie projective à seize ans ; ensuite il développe, en 1654, une méthode de résolution du « problème des partis » qui, donne naissance au cours du XVIII^{e} siècle au calcul des probabilités.

Définition

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire qui ne comporte que deux issues : le succès ou l'échec.
Le succès noté S a une probabilité p.
Par conséquent, l'échec $\bar{S}$ a une probabilité $1-p$.

Exemple 1.
Un examen comporte un QCM ; il y a trois questions indépendantes et pour chaque question, il y a quatre propositions dont une seule est juste. Un candidat décide de répondre au hasard.
Quelle est la probabilité, à 10^{-3} près, que le candidat donne la réponse juste à au moins deux questions sur trois ?

II. La loi Binomiale

On considère une épreuve de Bernoulli dans laquelle la probabilité d'un succès est p. On répète n fois cette épreuve de Bernoulli de façon identique et indépendante.

Définition

Soit X la fonction qui, à chaque issue du schéma de Bernoulli, associe le nombre de succès obtenus.
On dit que X est la variable aléatoire associée à ce schéma de Bernoulli.

La variable aléatoire X prends toutes les valeurs entières entre 0 et n.

On appelle loi de X la donnée de toutes les probabilités résumées dans le tableau ci-dessous :

k	0	1	...	n
$P(X=k)$	$P(X=0)$	$P(X=1)$		$P(X=n)$

On dit que X suit une loi binomiale de paramètres n et p. Cette loi est notée $B(n;p)$.

Exemple 2.

Une entreprise fabriquant des appareils électriques commande à un fournisseur 50 condensateurs. La probabilité qu'un condensateur soit défectueux est 0,02.

On considère le choix des 50 condensateurs comme un tirage avec remise. Soit X la variable aléatoire qui, à un lot de 50 condensateurs associe le nombre de condensateurs défectueux.

Quelle est la probabilité qu'il n'y ait aucun condensateur défectueux dans le lot ?

qu'il y ait 10 condensateurs défectueux ?

qu'il y ait au moins un condensateur défectueux ?

Propriété

La **moyenne ou espérance** d'une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale $B(n;p)$ est $E(X)=n\times p$.

L'**écart type** de X est $\sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}$.

La **variance** de X est $V(X)=\sigma^2(X)=np(1-p)$.

Interprétation :

L'espérance est la valeur que l'on peut espérer obtenir en moyenne lorsque l'on reproduit un grand nombre de fois l'expérience.

III. Probabilités conditionnelles, indépendance

Définition :

Une loi de probabilité P est définie sur un ensemble Ω.
A et B sont deux événements avec $P(A) \neq 0$.
La probabilité de l'événement B sachant A, notée $P_A(B)$, est définie par $\boldsymbol{P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$.

Exemple 3 : Dans un pays, il y a 2 % de la population contaminée par un virus. On dispose d'un test de dépistage de ce virus pour lequel la probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de 0,99 (sensibilité du test) et la probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de 0,97 (spécificité du test).

Calculer la probabilité que le test soit positif.

Peut-on affirmer que si le test est positif, il n'y a qu'environ 40 % de « chances » que la personne soit contaminée ?

Déterminer la probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif.

Définition

Deux événements A et B sont indépendants lorsque la réalisation ou non de B n'a pas d'influence sur la réalisation de A donc

$$P_B(A) = P(A) \qquad \text{et} \qquad P_A(B) = P(B)$$

On pose alors que deux événements A et B sont indépendants lorsque

$$\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)}$$

Exemple 4 :

On tire au hasard une carte dans un jeu de 52 cartes. Soit A l'événement « la carte tirée est un pique » et B l'événement « la carte tirée est un as ». A et B sont-ils indépendants ?

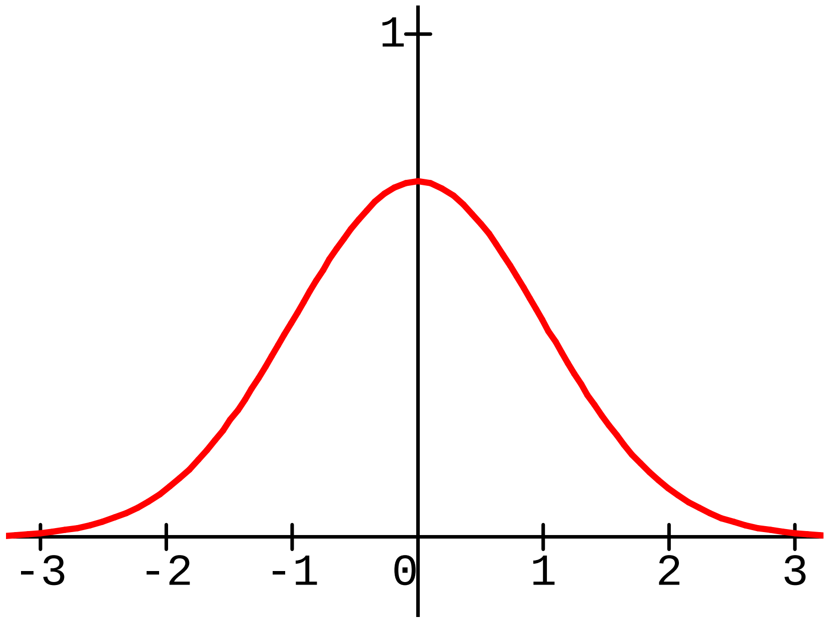
IV. Loi normale

Définition :

Une variable aléatoire X suit la **loi normale d'espérance $\boldsymbol{\mu}$ et d'écart-type $\boldsymbol{\sigma}$** notée $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$ lorsque la fonction de densité est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\times\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

On dit que la courbe représentant f est une courbe « en cloche ».

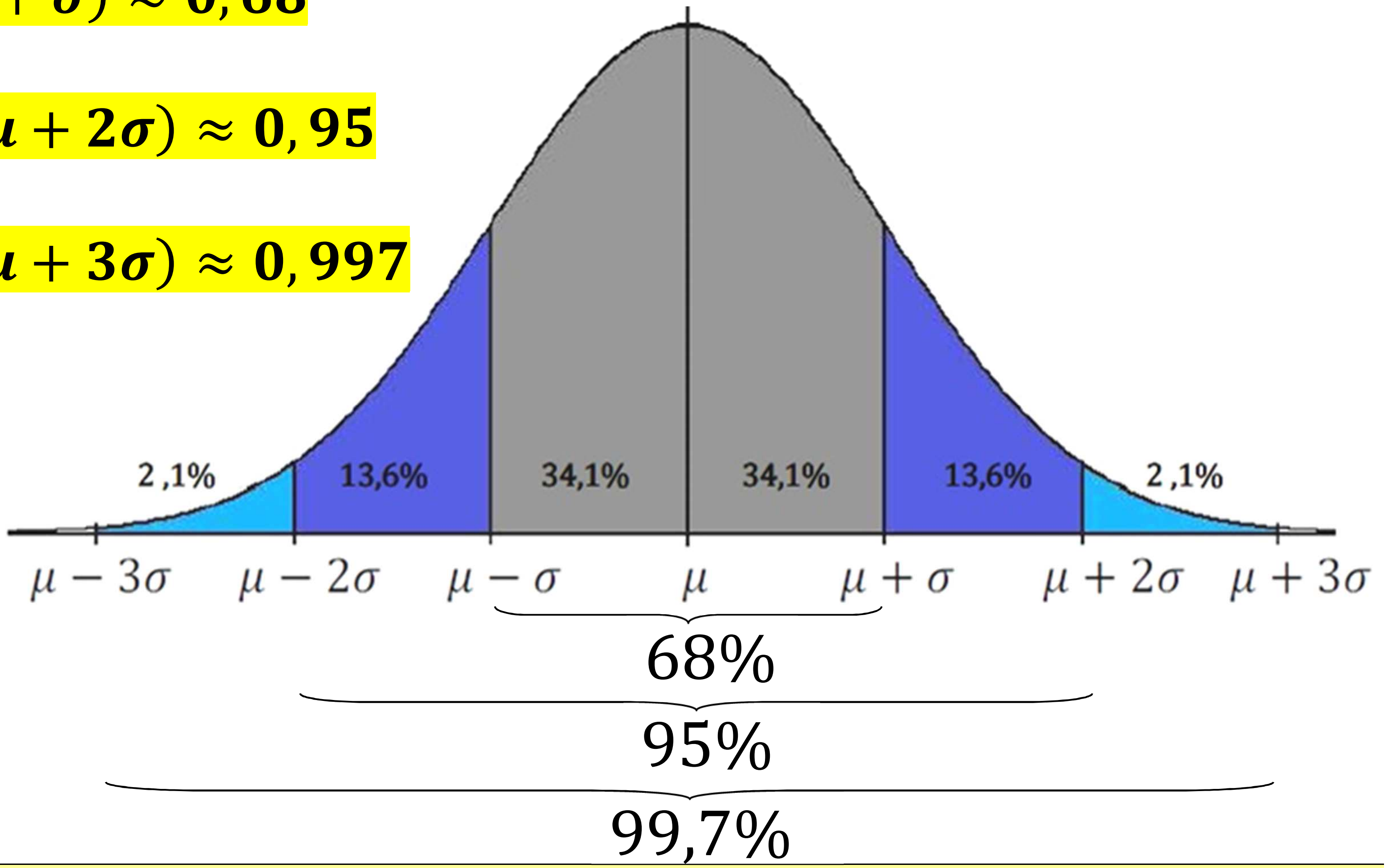


Remarque : Lorsque X suit une loi $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$

$\boldsymbol{P(\mu-\sigma \leq X \leq \mu+\sigma) \approx 0,68}$

$\boldsymbol{P(\mu-2\sigma \leq X \leq \mu+2\sigma) \approx 0,95}$

$\boldsymbol{P(\mu-3\sigma \leq X \leq \mu+3\sigma) \approx 0,997}$



Approximation d'une binomiale :

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathrm{B}(n;p)$ alors son espérance vaut $E(X) = np$ et son écart-type $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$.

Si n est « très grand » et si p n'est « ni trop voisin de 0, ni trop voisin de 1 » alors on peut approcher la loi binomiale $\mathrm{B}(n;p)$ par une loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$ avec :

$$\mu = np \quad \text{et} \quad \sigma = \sqrt{np(1-p)}$$

Exemple 5.

Le cahier des charges de l'usinage d'une tige prévoit pour sa longueur, en cm, l'intervalle de tolérance [4,40 ; 4,80].
Le service qualité constate qu'un premier lot de tiges fabriquées correspond à une distribution normale de moyenne 4,52 cm et d'écart –type 0,21 cm.

Quelle est la probabilité qu'une pièce prise au hasard dans ce lot, soit acceptable ?

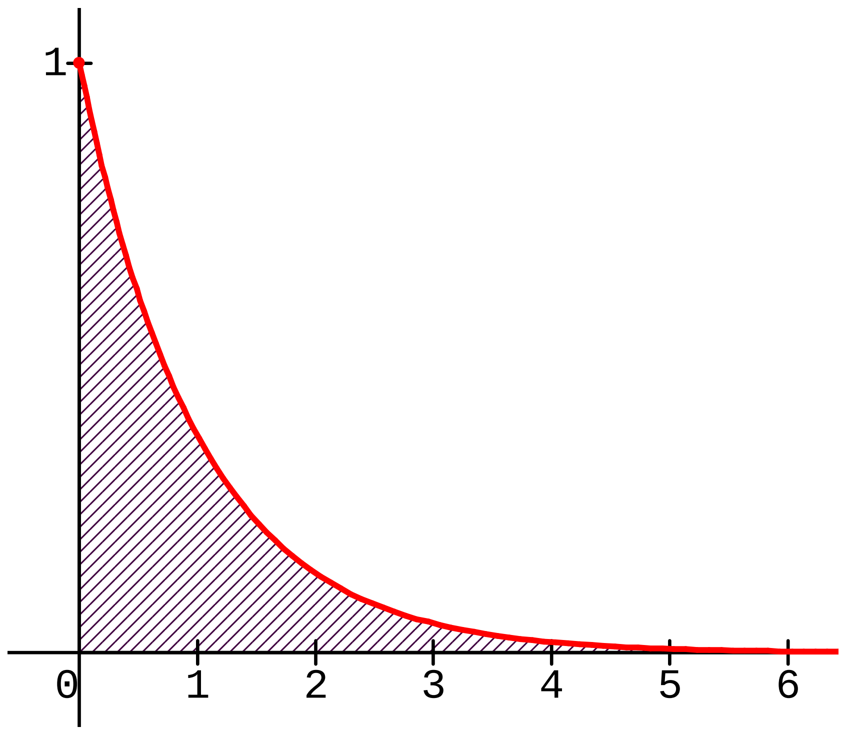
V. Loi exponentielle

Définition et propriété :

Soit $\lambda > 0$ un réel

T une variable aléatoire suit la loi exponentielle de paramètre $\boldsymbol{\lambda}$ sur $[0; +\infty[$ lorsque sa densité de probabilité est la fonction

$$\forall \boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{0}; +\infty[, \quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\lambda}\, \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{\lambda x}}$$



On a alors :

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{T}) = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\lambda}}$$

Exemple 6.

La durée de vie, en heures, d’un composant électronique est modélisée par la loi exponentielle d’espérance 2000.

Quelle est la probabilité que l’un des composant pris au hasard, soit encore en état de marche au bout de 500 h ?

VI. Loi de Poisson


Siméon Denis Poisson
(1781 - 1840)

La loi de Poisson est une loi discrète infinie, elle modélise les événements relativement rares dans un intervalle de temps déterminé. Par exemple, le nombre de pannes, d'erreurs dans un livre, les files d'attente …

Définition :

On appelle loi de Poisson de paramètre λ, la loi de la variable aléatoire X telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

On a alors $\boldsymbol{E(X) = \lambda}$ et $\boldsymbol{\sigma(X) = \sqrt{\lambda}}$

Exemple 7.

Dans une usine, les accidents sont isolés, indépendants les uns des autres et se produisent à une cadence fixe. On peut alors modéliser le nombre d'accidents pendant un temps donné par une loi de Poisson. Il se produit en moyenne 4 accidents par mois. Notons X le nombre d'accidents par mois.

Donner $E(X)$ puis déterminer $P(X=0)$ et $P(0 \leq X \leq 8)$.