Définition.

Un développement limité d'une fonction f au voisinage de 0 est une approximation de f par un polynôme et un reste qui peut être négligé lorsque x est très proche de 0.

$$f(x) = \underbrace{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n}_{partie\quad régulière} + \underbrace{x^n \varepsilon(x)}_{reste\quad négligeable} \quad \text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

Exemple : la fonction exponentielle

Avec Xcas, on obtient :

```
f(x):=exp(x)
                    (x)->exp(x)
series(f(x),0,3)
```

$$1 + x + \frac{1}{2} * x^2 + \frac{1}{6} * x^3 + x^4 \,\text{order\_size}(x)$$

$$f(x) = e^x = \underbrace{\mathbf{1 + x}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{x^2} + x^3 \varepsilon(x)$$

L'équation de la tangente est donc

$$y = 1 + x.$$

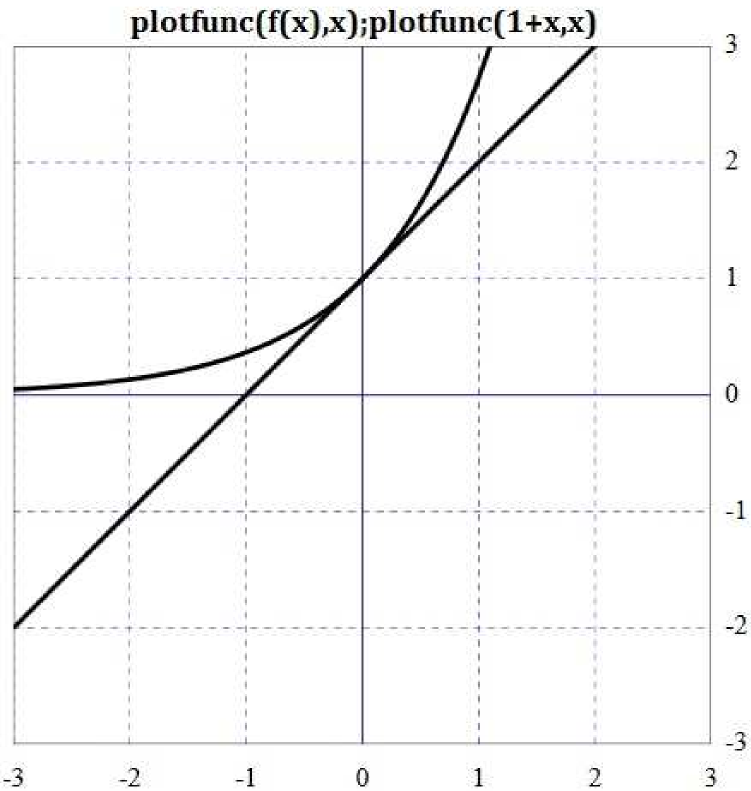
$$f(x) - (\mathbf{1 + x}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{x^2} + x^3 \varepsilon(x)$$

et, $\frac{1}{2}x^2 \geq 0$, pour tout x

On en déduit que la courbe est au-dessus de sa tangente.

D'autre part :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\left(1 + \varepsilon(x)\right) = 1$$



2e exemple :

```
f(x):=sqrt(3+x^3)
                    (x)->sqrt(3+x^3)
series(f(x),0,3)
```

$$\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{6} * x^3 + x^4 \,\text{order\_size}(x)$$

Quelle est la tangente ? Quelle sont les positions relatives ? $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{3+x^3} - \sqrt{3}}{x^3} = ?$