1.

Les cannettes de soda ont une capacité de $33\ cL = 330\ cm^3$.

Elles ont la forme d'un cylindre dont le volume se calcule par la formule

$$V = 330 = \pi \times R^2 \times h = \pi \times x^2 \times h$$

$$\text{d'où } h = \frac{330}{\pi x^2}$$

2.

$f(x)$ l'aire totale du cylindre se calcule en ajoutant l'aire des deux bases de forme circulaires et l'aire latérale du cylindre.

Lorsque l'on déplie l'aire latérale, on obtient un rectangle de largeur h et de longueur $2\pi R$, l'aire vaut donc $2\pi R \times h$

$$f(x) = 2\pi R \times h + 2 \times \pi \times R^2 = 2\pi x \times \frac{330}{\pi x^2} + 2 \times \pi \times x^2$$

$$f(x) = \frac{660}{x} + 2\pi x^2 = \frac{660}{x} + \frac{2\pi x^3}{x} = \frac{660 + 2\pi x^3}{x}$$

$$f(x) = \frac{660 + 2\pi x^3}{x} = \frac{u}{v}$$

$$u = 660 + 2\pi x^3 \qquad u' = 6\pi x^2$$

$$v = x \qquad v' = 1$$

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{6\pi x^2 \times x - (660 + 2\pi x^3) \times 1}{x^2} = \frac{6\pi x^3 - 660 - 2\pi x^3}{x^2}$$

$$\text{donc} \quad f'(x) = \frac{4\pi x^3 - 660}{x^2}$$

$x^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $4\pi x^3 - 660$

$$4\pi x^3 - 660 > 0$$

$$\Leftrightarrow 4\pi x^3 > 660$$

$$\Leftrightarrow x^3 > \frac{660}{4\pi}$$

$$\Leftrightarrow x^3 > \frac{165}{\pi}$$

$$\Leftrightarrow x > \sqrt[3]{\frac{165}{\pi}} \approx 3{,}745$$

x	0		$\sqrt[3]{\frac{165}{\pi}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

	L'aire est donc minimale pour un rayon $x = \sqrt[3]{\frac{165}{\pi}} \approx 3{,}745\ cm$ et elle vaut $$f\left(\sqrt[3]{\frac{165}{\pi}}\right) = \frac{660 + 2\pi\left(\frac{165}{\pi}\right)}{\sqrt[3]{\frac{165}{\pi}}} = \frac{660 + 330}{\sqrt[3]{\frac{165}{\pi}}} = 990\sqrt[3]{\frac{\pi}{165}} \approx 264{,}36\ cm^2$$