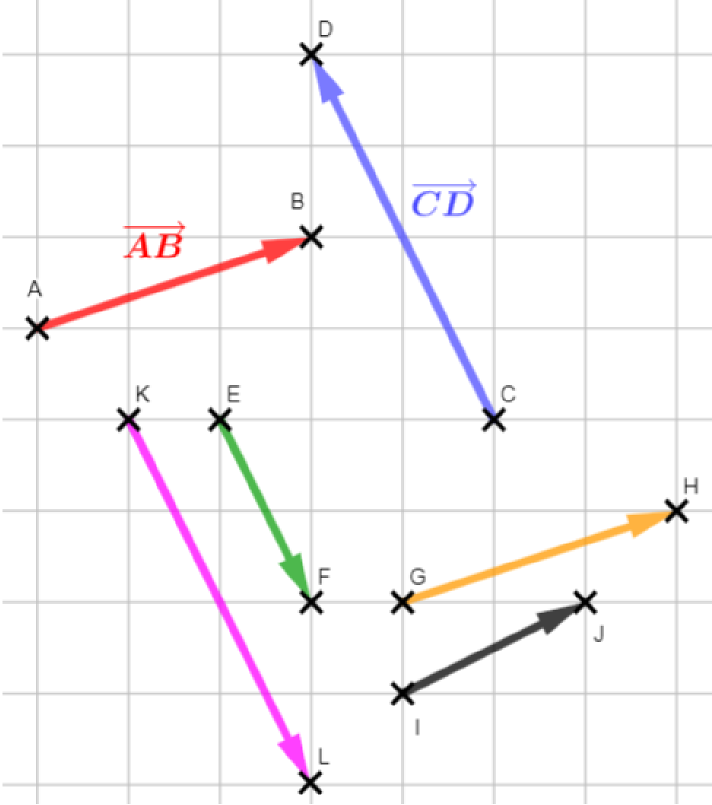
Michel Chasles (1793 - 1880)

Mathématicien et ingénieur français, il a travaillé surtout en géométrie. En 1865, la Royal Society de Londres lui décerne la médaille Copley, la plus prestigieuse et ancienne médaille que l'Angleterre puisse donner dans le domaine des sciences.

I. Définition d'un vecteur



Définition.

Un vecteur $\vec{u}$ est défini par :

- une direction,
- un sens
- une longueur ou norme notée $||\vec{u}||$

$\boxed{1}$ *Sur le dessin ci-contre, peut-on donner deux vecteurs qui n'ont en commun que la direction ? le sens ? la longueur ?*

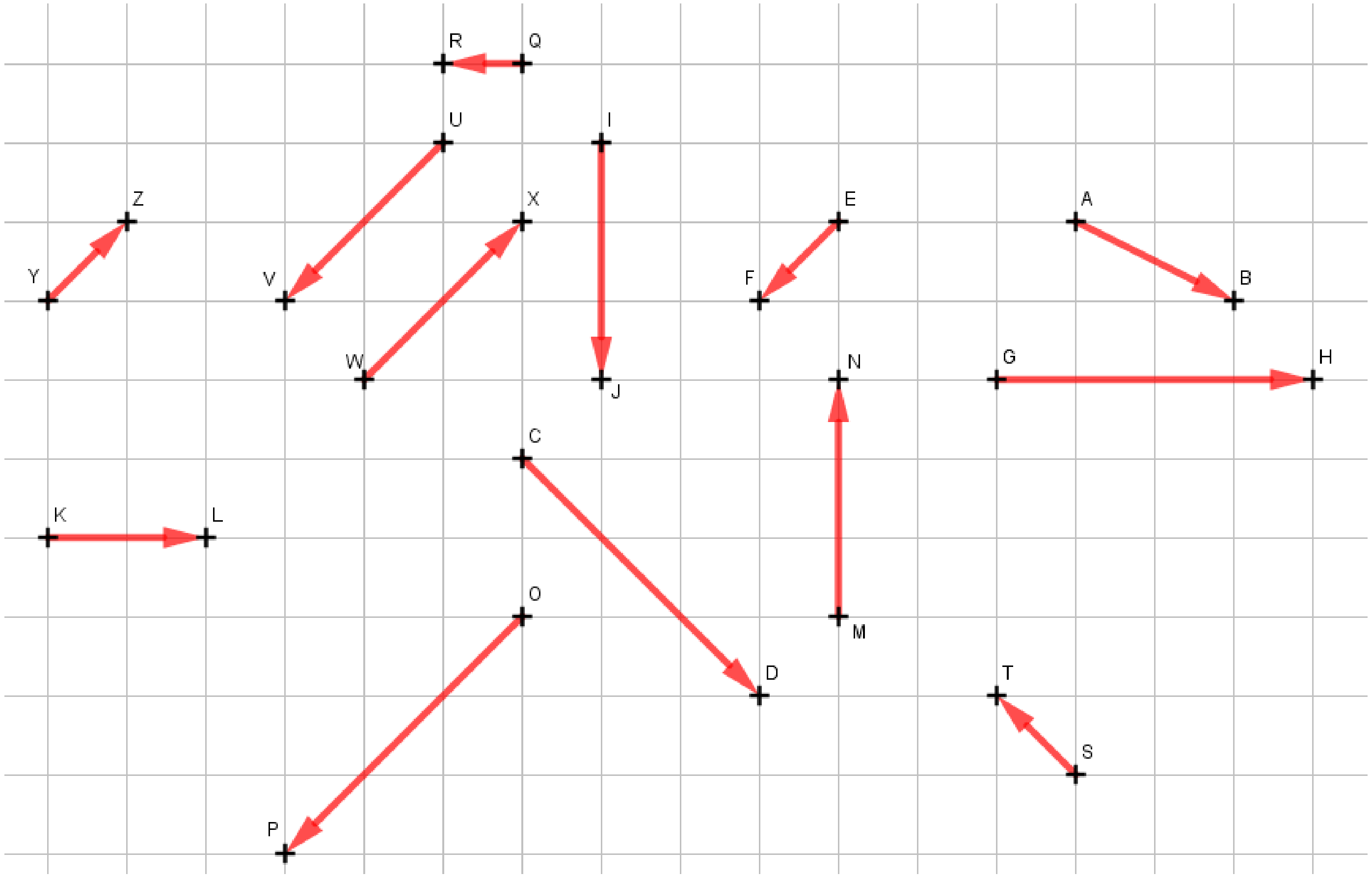
$\boxed{2}$ *Peut-on donner deux vecteurs égaux ? opposés ?*

$\boxed{3}$ *$\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{GH}$ sont-ils de même sens ?*

Exemple n°1 :

Deux vecteurs de même direction et longueur mais pas de même sens :

Deux vecteurs de même longueur mais pas de même direction :



$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{GH}$ ont-ils le même sens ?

Propriétés.

Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

alors $ABDC$ est un parallélogramme

Réciproquement

Si $ABDC$ est un parallélogramme

alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

Remarque.

On dit alors que les propositions « $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ » et « $ABDC$ est un parallélogramme » sont **équivalentes.**

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si, et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme

Exemple n°2 :
$ABCD$ est un losange.
Les points A' et C' sont les images respectives des points A et C par la translation de vecteur $\overrightarrow{BD}$.

Faire une figure.
Comparer les longueurs AC' et CA', que peut-on conjecturer ?
Démontrez votre conjecture.

Théorème :

Soient A, B et M trois points distincts

M est le milieu du segment $[AB]$ si, et seulement si $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$

Exemple n°3 :

Soit $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre $[AB]$ et de centre O.

Le point M appartient au cercle $\mathcal{C}$.

Le point M' vérifie $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{MO}$.

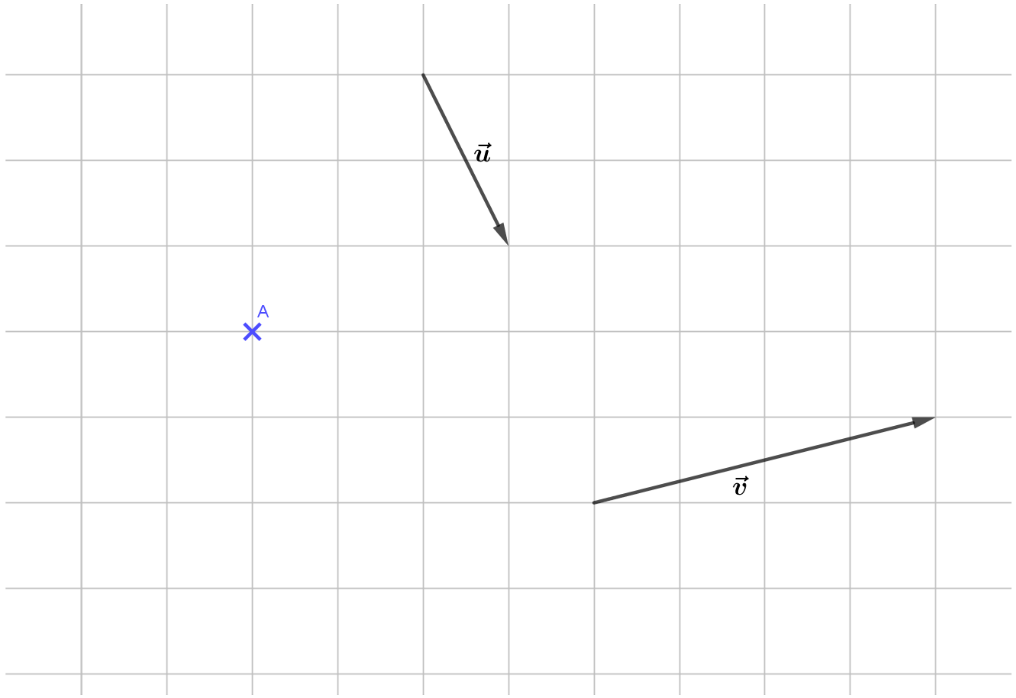
Quelle est la nature du quadrilatère $AMBM'$?

En déduire la nature du triangle AMB.

II. Somme de vecteurs

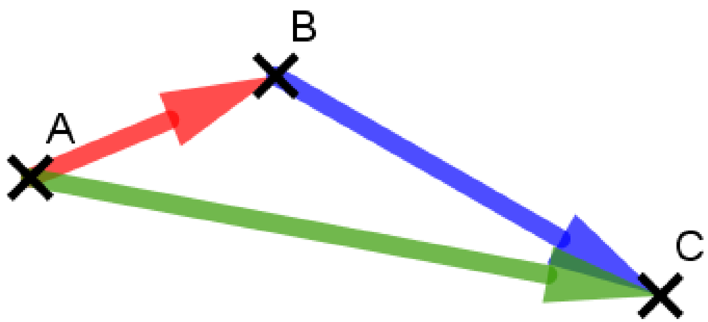
Exemple n°4 :

- Placer A_1 l'image de A par la translation de vecteur $\vec{u}+\vec{v}$.
- Placer A_2 l'image de A par la translation de vecteur $2\vec{u}$.
- Placer A_3 tel que $\overrightarrow{AA_3}=\vec{v}-\vec{u}$.



Relation de Chasles.

Soit trois points A, B et C non alignés, la somme des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ représente la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ suivie immédiatement de la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$. Il s'agit donc de la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$ donc



$$\overrightarrow{\mathbf{AB}} + \overrightarrow{\mathbf{BC}} = \overrightarrow{\mathbf{AC}}$$

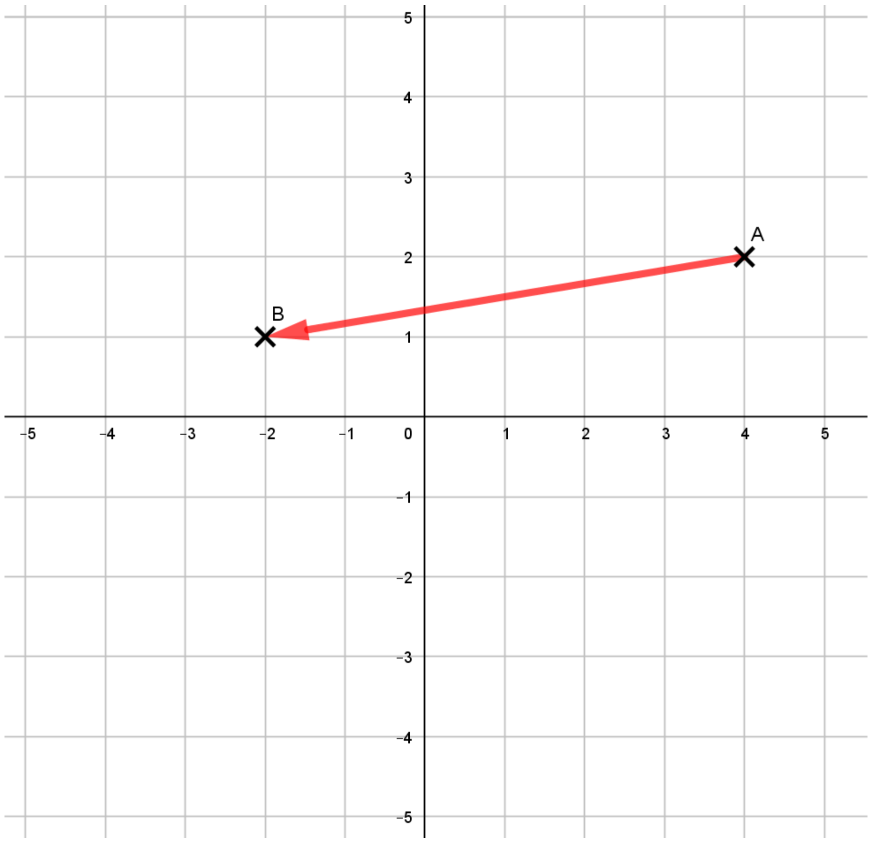
Exemple n°5 :

Simplifiez les vecteurs suivants :

$$\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \qquad \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{KL} - \left(\overrightarrow{IL} + \overrightarrow{KJ}\right)$$

III. Dans un repère

- Lire les coordonnées des points A et B et celles du vecteur $\overrightarrow{AB}$
- Placer les points $C(1\,;3)$ et $D(5\,;4)$. Quelles sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CD}$?
- Placer les points $E(-3\,;-2)$ et $F(4\,;-4)$. Quelles sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{EF}$?
- Représenter $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$



Définition

Dans un repère (O, I, J) du plan,

$$A(x_A; y_A)$$
$$B(x_B; y_B)$$

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont

$$\boldsymbol{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}} \\ y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{A}} \end{pmatrix}}$$

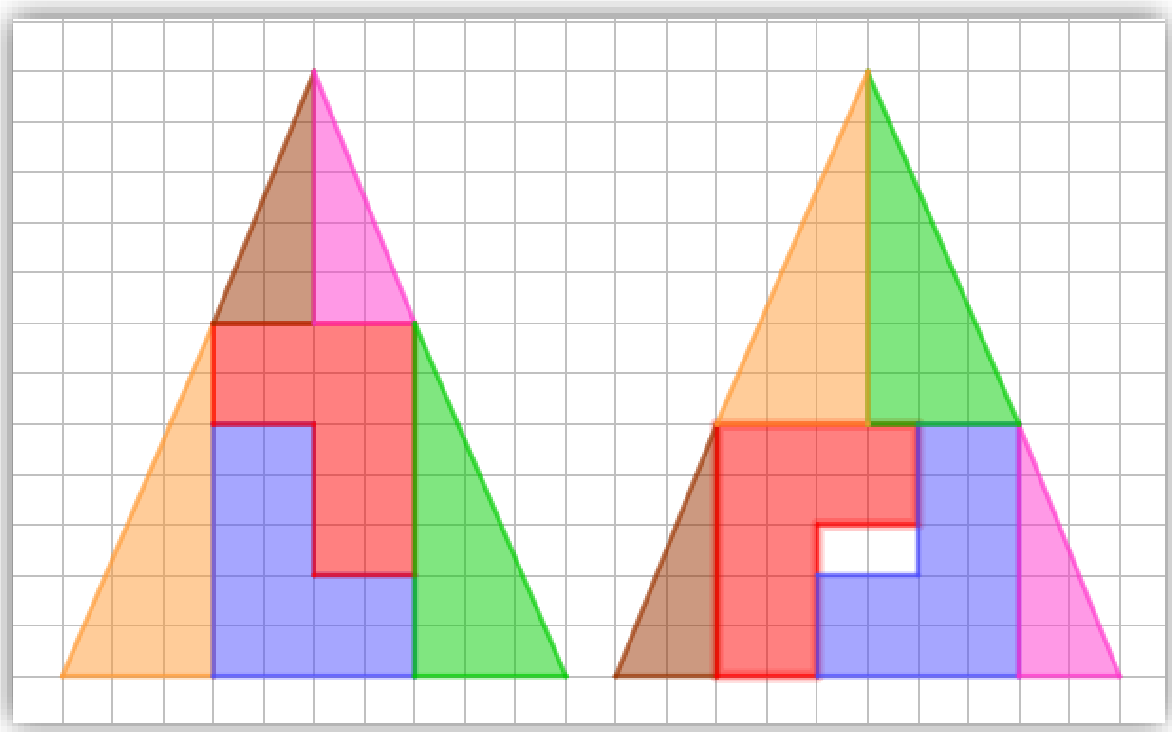
Exemple n°6 :

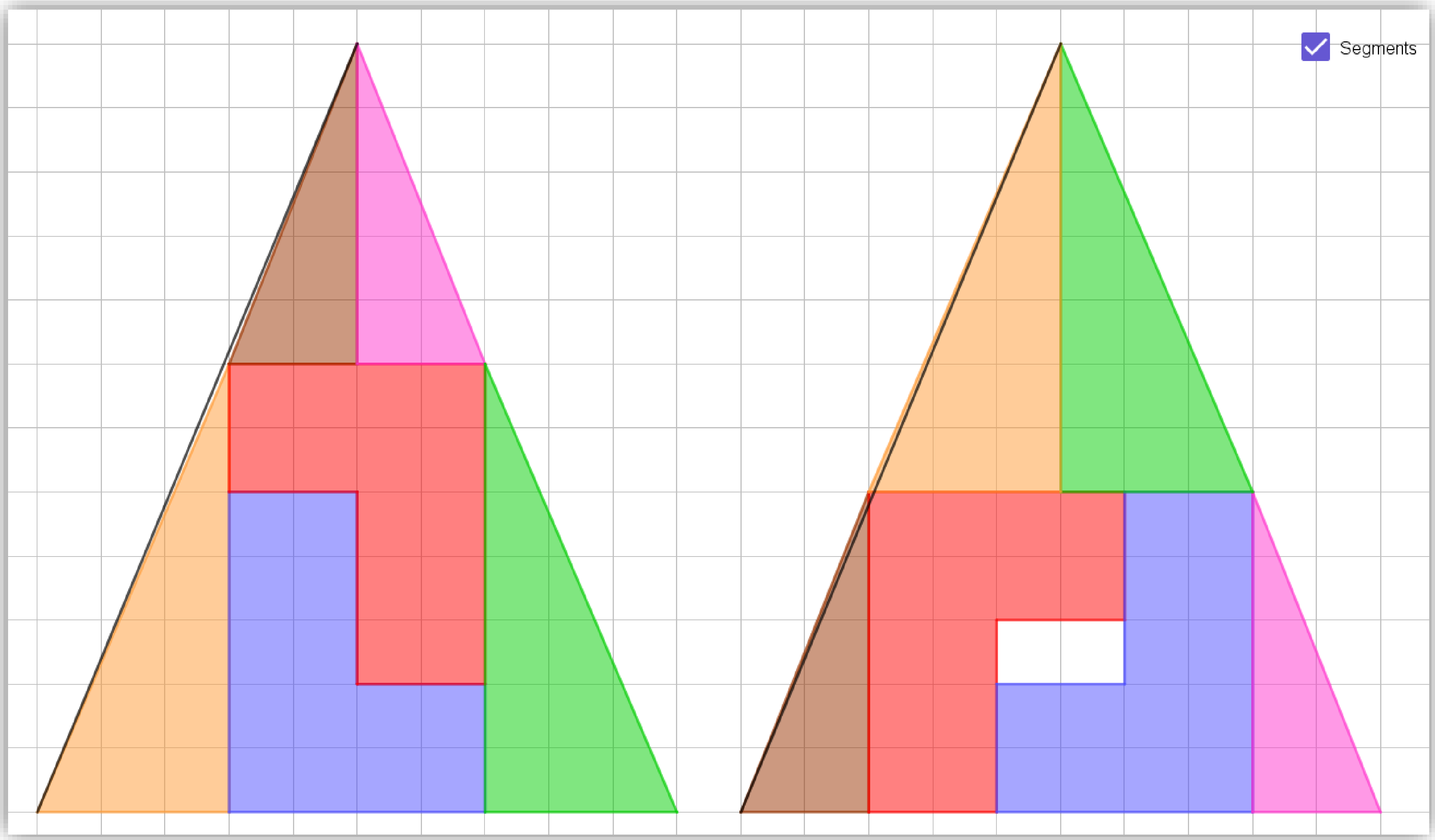
Dans un repère orthonormé, on place les points $A(3; 2)$, $B(-2; 1)$, $C(4; -1)$ et $D(-1; -2)$.

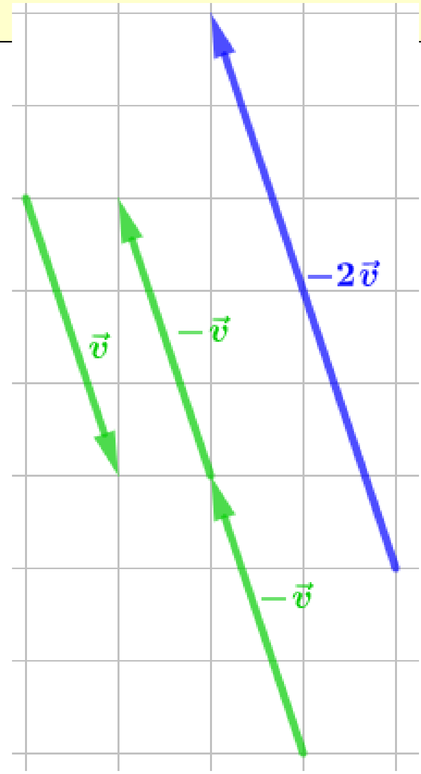
Quelle est la nature du quadrilatère obtenu ?

IV. Vecteurs colinéaires

Où est le problème ?

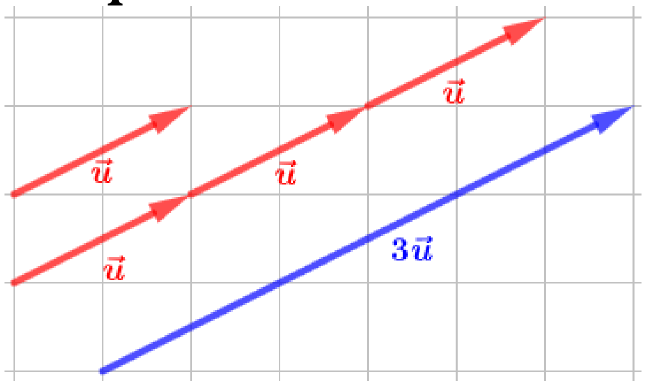



Segments



Définition :

Les $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** lorsqu'il existe un nombre réel k tel que $\boldsymbol{\vec{u} = k \times \vec{v}}$.



Conséquences :

- Le vecteur nul noté $\vec{0}$ est colinéaire à tous les vecteurs.
- **Deux vecteurs non nuls sont colinéaires si, et seulement si, ils ont la même direction.**

Théorème :

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$, on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si,

$$\mathbf{det}(\vec{\boldsymbol{u}},\vec{\boldsymbol{v}}) = \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{b}-\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$$

Exemple n°7 :

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$, on place les points $A(-4;1)$, $B(1;2)$, $C(491;100)$ et $D(-369;-71)$

Les points A, B, C et D sont-ils alignés ?

Exemple n°8 :

Tracer le rectangle $ABCD$, puis les points E, F et G tels que :

$$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \qquad \overrightarrow{BF}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \qquad \overrightarrow{DG}=-\frac{5}{2}\overrightarrow{AD}$$

a) Démontrer que $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=-2\overrightarrow{EF}$.

b) Démontrer que $\overrightarrow{FG}=-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$.

c) Les points E, F et G sont-ils alignés ?