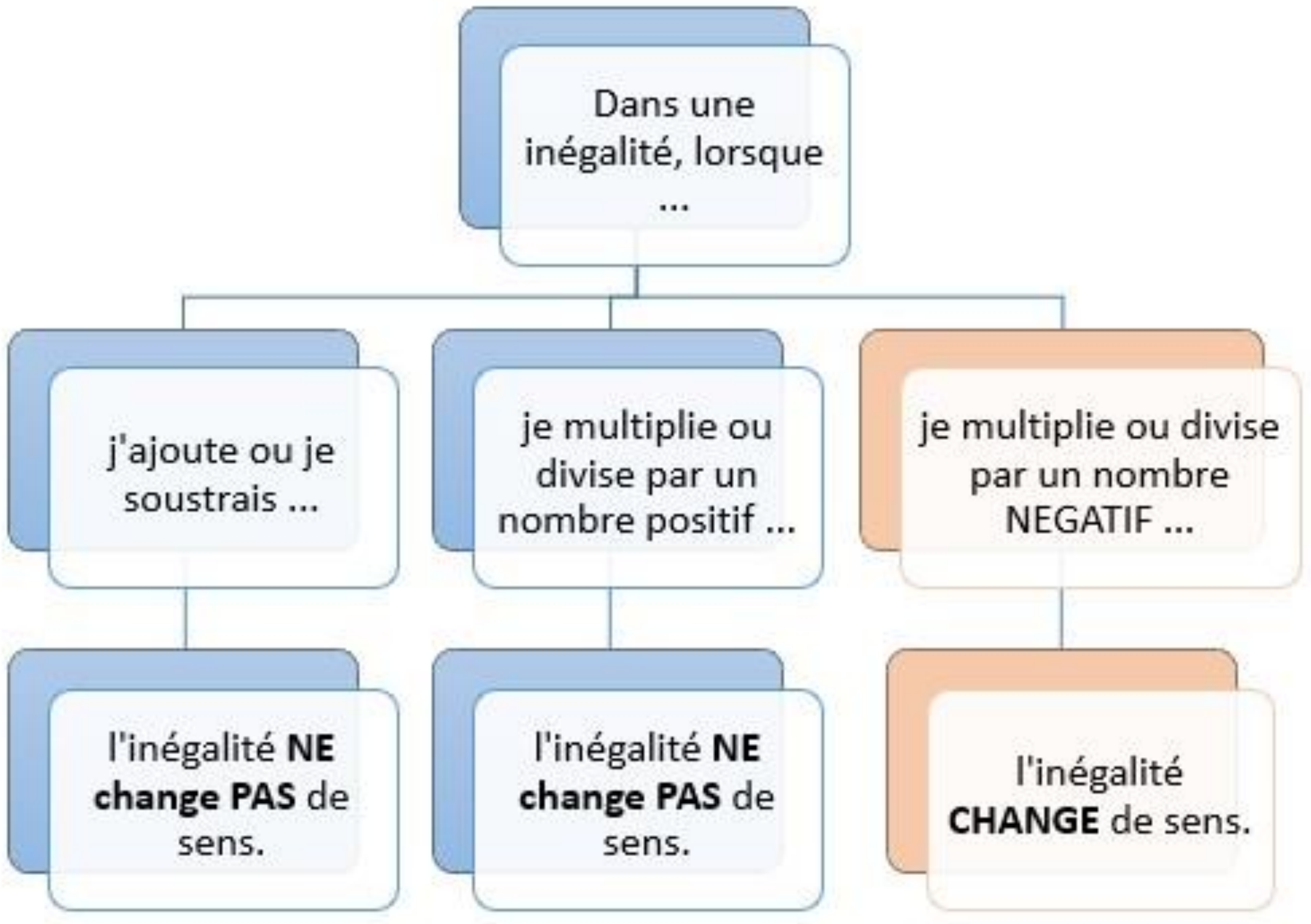
Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716)

Mathématicien, philosophe, scientifique, logicien, diplomate, juriste, bibliothécaire et philologue allemand, il est souvent considéré comme le dernier « génie universel ». Il introduit le terme de fonction dans un cadre géométrique, il désigne par ce terme des grandeurs géométriques dépendant d'autres grandeurs géométriques.

I. Problème :


Dans une inégalité, lorsque ...
j'ajoute ou je soustrais ...
je multiplie ou divise par un nombre positif ...
je multiplie ou divise par un nombre NEGATIF ...
l'inégalité **NE change PAS** de sens.
l'inégalité **NE change PAS** de sens.
l'inégalité **CHANGE** de sens.

Exemple :

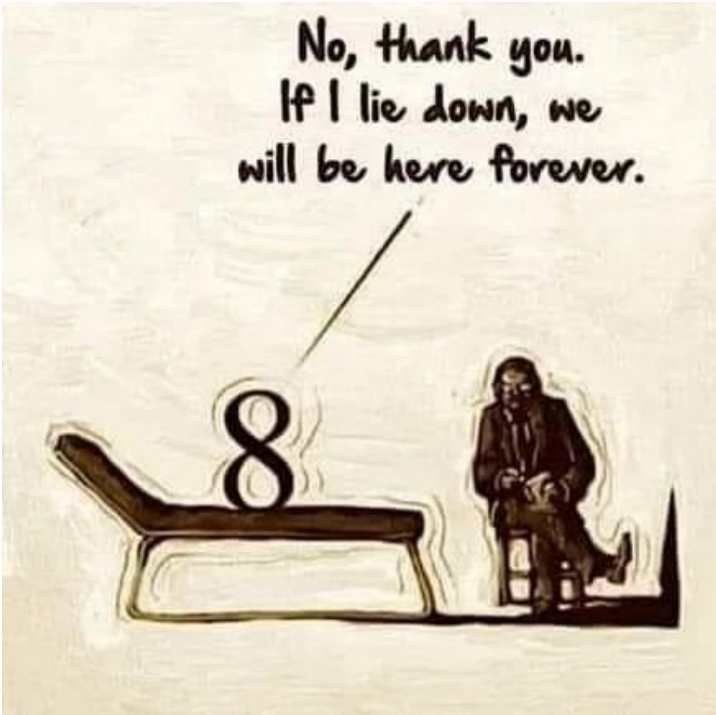
Chaque mois, un magasin spécialisé dans l'informatique vend ses ordinateurs reconditionnés 250 euros chacun. Le gérant sait que les frais de son magasin sont liés au nombre d'ordinateurs vendus. Chaque mois, il a 1000 euros de frais fixes auxquels s'ajoutent 120 euros par ordinateur pour le reconditionnement.

Combien doit-il vendre d'ordinateurs pour que son commerce doit bénéficiaire ?

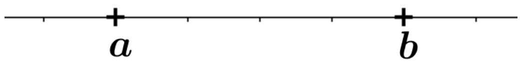
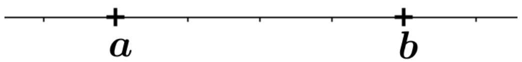
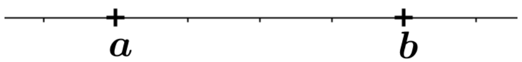
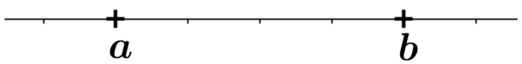
Exemple :

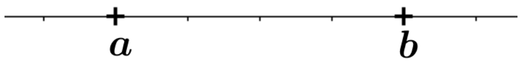
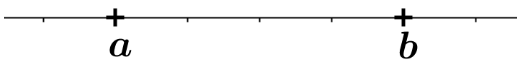
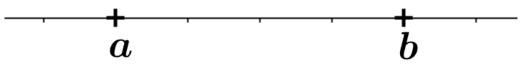
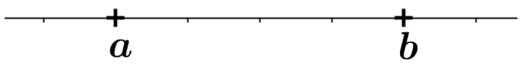
Résoudre l'inéquation $3(2-4x) \geq 1-7x$

Représenter les solutions sur une droite graduée.

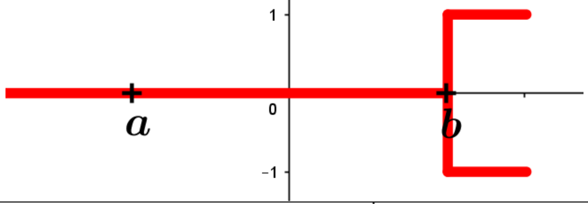
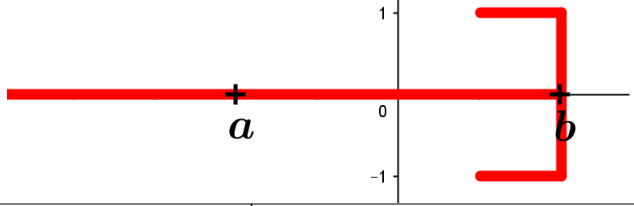
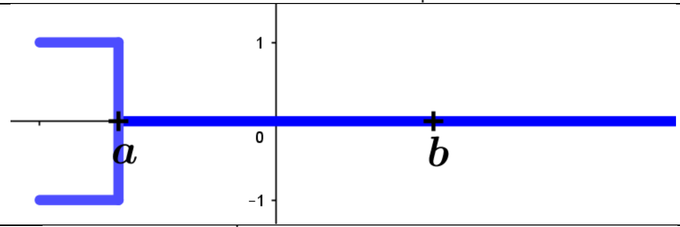
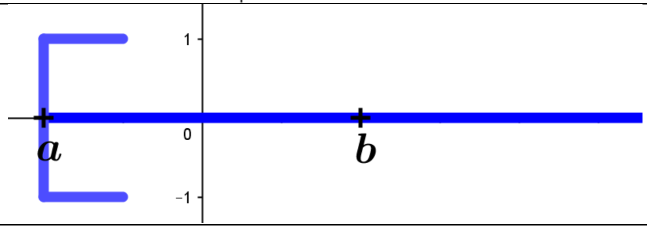


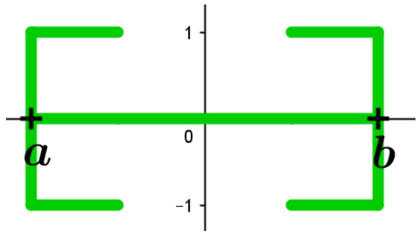
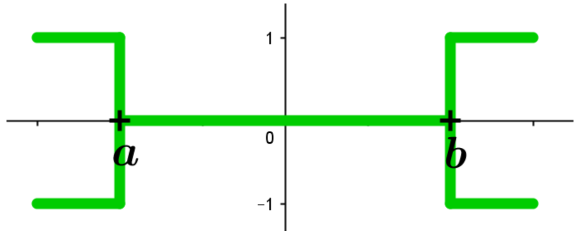
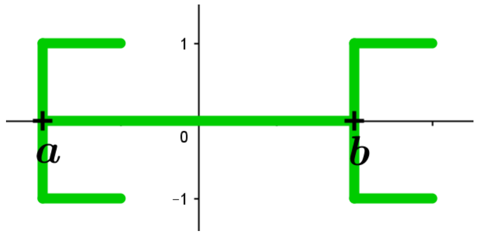
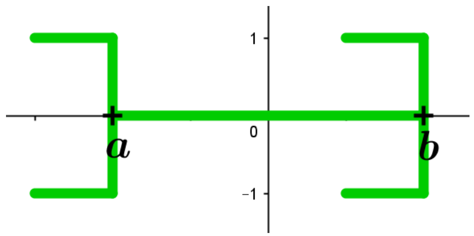
II. Notion d'intervalles

Notation inégalité	Droite graduée	Notation intervalle
$x < b$		$x \in]-\infty, b[$
$x \leq b$		$x \in]-\infty, b]$
$x > a$		$x \in]a, +\infty[$
$x \geq a$		$x \in [a, +\infty[$

$a \leq x \leq b$		$x \in [a, b]$
$a < x < b$		$x \in]a, b[$
$a \leq x < b$		$x \in [a, b[$
$a < x \leq b$		$x \in]a, b]$

III. Notion d'intervalles

Notation inégalité	Droite graduée	Notation intervalle
$x < b$		$x \in]-\infty, b[$
$x \leq b$		$x \in]-\infty, b]$
$x > a$		$x \in]a, +\infty[$
$x \geq a$		$x \in [a, +\infty[$

$a \leq x \leq b$		$x \in [a, b]$
$a < x < b$		$x \in]a, b[$
$a \leq x < b$		$x \in [a, b[$
$a < x \leq b$		$x \in]a, b]$

Exemple :

Soit $I =]-2;3]$, $J = [-1;+\infty[$ et $K =]-\infty;-1[$

▶ 1. Sur une droite graduée, colorier chaque intervalle I, J et K d'une couleur différente.

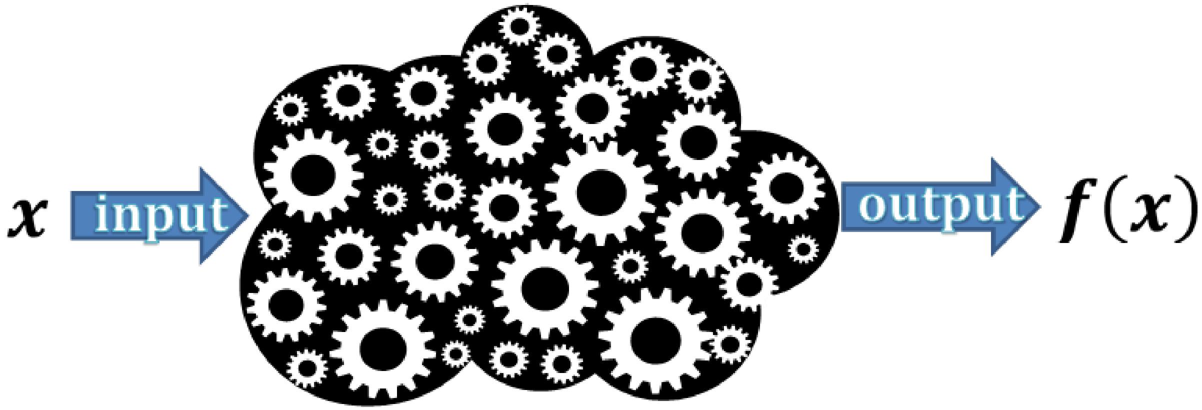
▶ 2a) Déterminer l'ensemble de nombres x tels que $x \in I$ et $x \in J$, on note cet intervalle $I \cap J$.

b) Déterminer $I \cap K$ puis $K \cap J$.

▶ 3a) Déterminer l'ensemble de nombres x tels que $x \in I$ ou $x \in J$, on note cet intervalle $I \cup J$.

b) Déterminer $I \cup K$ puis $K \cup J$.

IV. Fonctions affines



On considère deux réels a et b. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ est appelée **fonction affine**.

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto ax + b \end{array}$$

Si $a = 0$ alors la fonction $f(x) = b$ est dite **constante.**

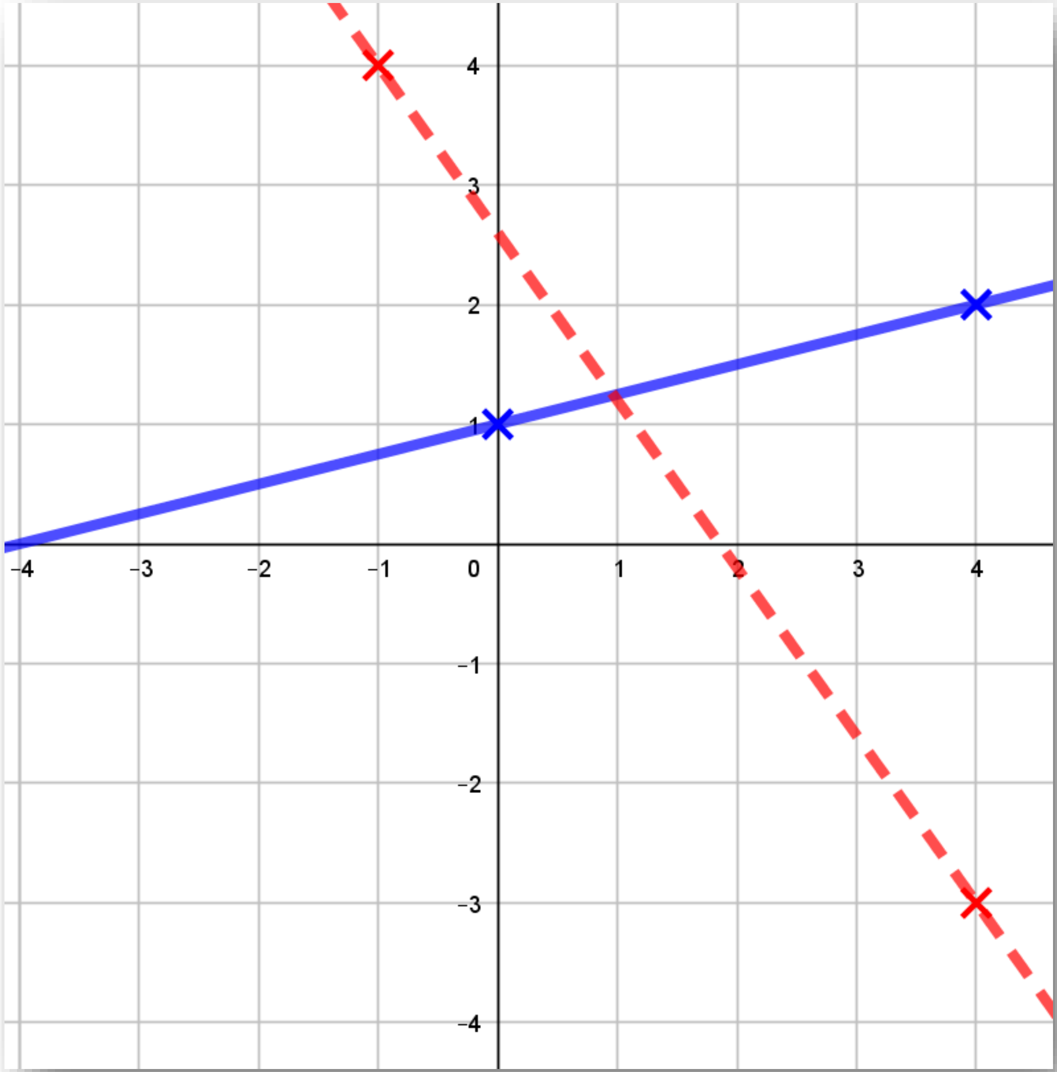
Si $b = 0$ alors la fonction $f(x) = ax$ est dite **linéaire.**

Propriété

La fonction affine $f(x) = ax + b$ est représentée graphiquement par la **droite d'équation $\boldsymbol{y = ax + b}$** qui n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées.

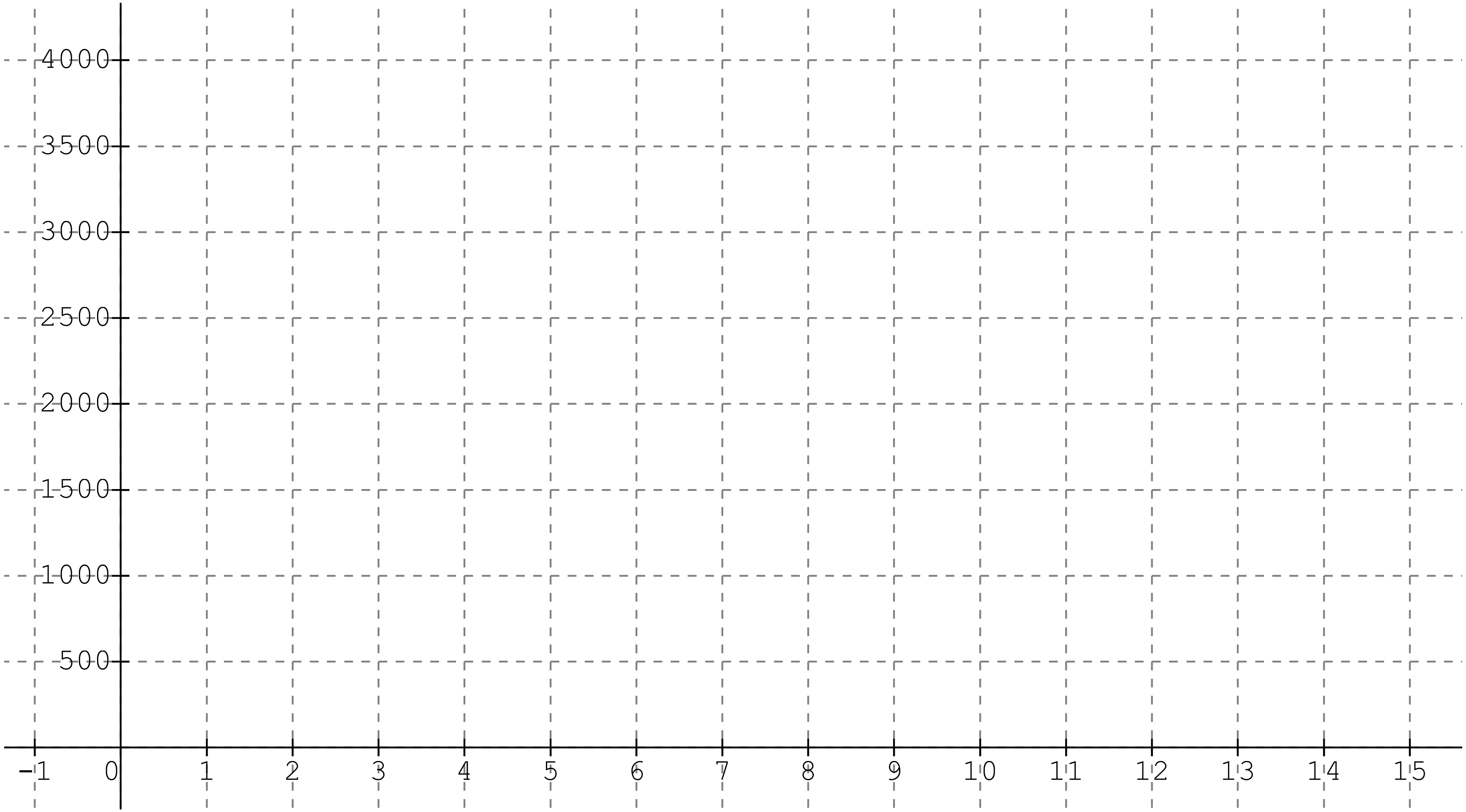
a est le **coefficient directeur** et b **l'ordonnée à l'origine**.

Exemple. Donner l'expression algébrique des deux fonctions affines représentées graphiquement ci-dessous.


4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4

Exemple. Tracer les représentations graphiques des fonctions

$$f(x) = 250x \qquad\qquad g(x) = 1000 + 120x$$



Théorème. Tableau de variations

Soit une **fonction affine** $f(x) = ax + b$

Si $a > 0$
alors f est strictement croissante

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	

Si $a < 0$
alors f est strictement décroissante

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	

Théorème. Tableau de signes

Soit une **fonction affine** $f(x) = ax + b$

Si $a \neq 0$ alors $f(x)$ s'annule pour $x = -\frac{b}{a}$ si $a \neq 0$

Si $a > 0$
alors

x	$-\infty$		$\frac{-b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Si $a < 0$
alors

x	$-\infty$		$\frac{-b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	