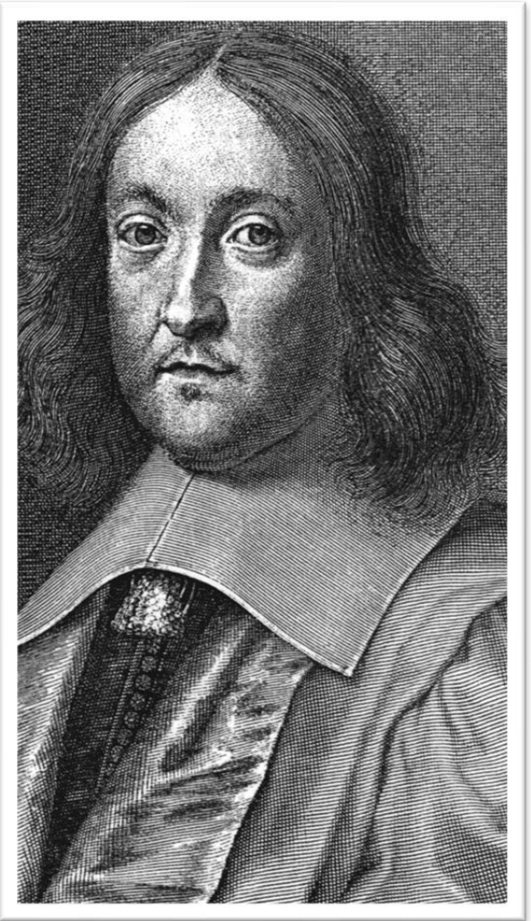
Pierre de Fermat (XVIIe siècle)



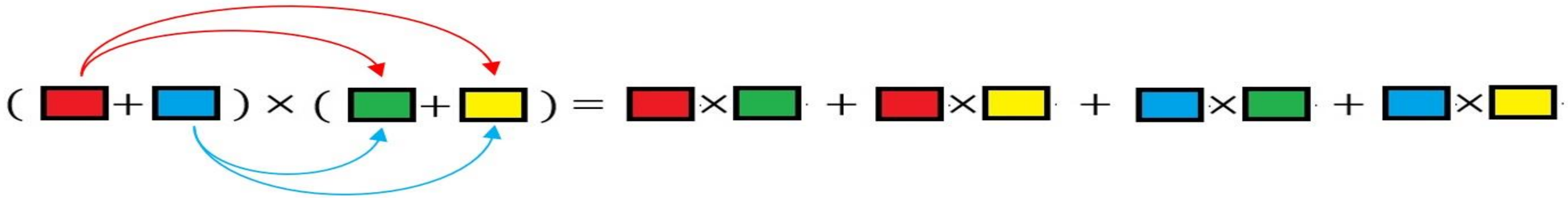
Mathématicien français, surnommé « le prince des amateurs », il a énoncé notamment le dernier théorème de Fermat, dont la démonstration n'a été établie que plus de 300 ans plus tard par le mathématicien britannique Andrew Wiles en 1994.

Méthode de factorisation :

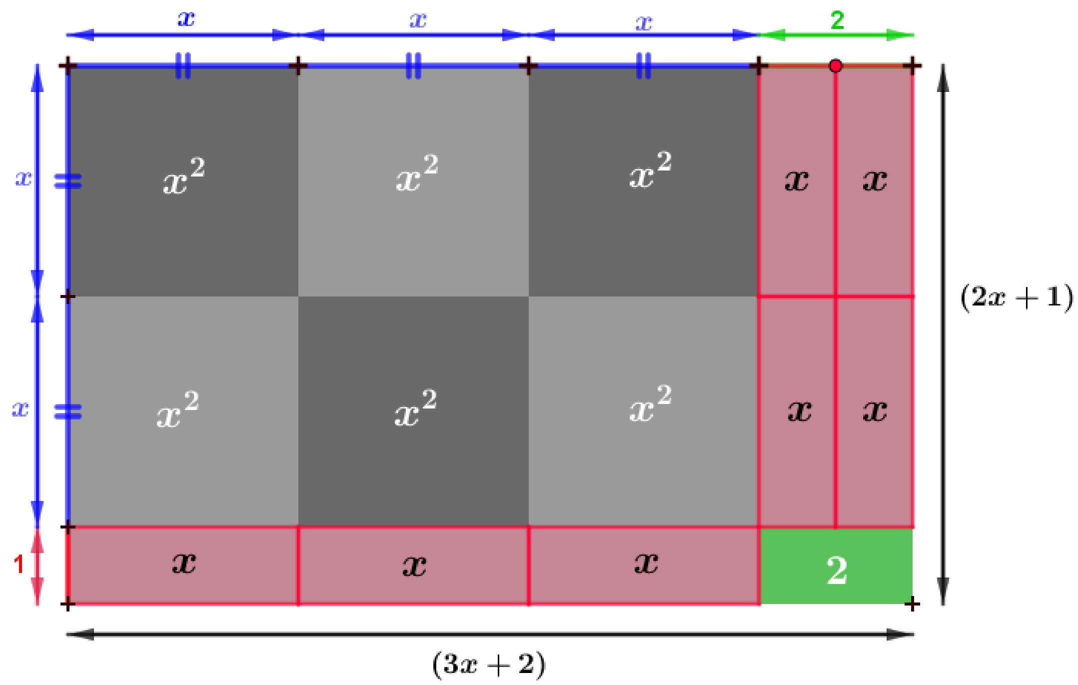
Si $N = cd$ alors $N = \left(\frac{c+d}{2}\right)^2 - \left(\frac{c-d}{2}\right)^2$

I. Développements :

$$(ax+b)(cx+d) = acx^2 + adx + bcx + bd$$



$$(\mathbf{3}x+\mathbf{2})\times(\mathbf{2}x+\mathbf{1}) = \cdots$$



Exemple 1.
Développer et réduire

$$A = (3x + 7)(5x + 1)$$

$$B = (6 - 2x)(4x - 8) - 5(6 - 2x)$$

$$C = x(2 - 8x) - (3 + 5x)(2 - 8x)$$

$$D = 4(7x - 5)(2 - 9x)$$

Exemple 1.
Développer et réduire

$$(3x+7)(5x+1) = 15x^2 + 3x + 35x + 7$$
$$= 15x^2 + 38x + 7$$

$$(6-2x)(4x-8) - 5(6-2x)$$
$$= 24x - 48 - 8x^2 + 16x - 30 + 10x$$
$$= -8x^2 + 50x - 78$$

$$
\begin{aligned}
x(2-8x)-(3+5x)(2-8x) &= 2x-8x^2-(6-24x+10x-40x^2) \\
&= 2x-8x^2-(6-14x-40x^2) \\
&= 2x-8x^2-6+14x+40x^2 \\
&= 32x^2+16x-6
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
4(7x-5)(2-9x) &= 4(14x-63x^2-10+45x) \\
&= 4(-63x^2+59x-10) \\
&= -252x^2+236x-40
\end{aligned}
$$

II. La fonction carré

Soit la fonction définie par, pour tout réel x, $f(x) = x^2$.

▶1. Compléter le tableau ci-dessous :

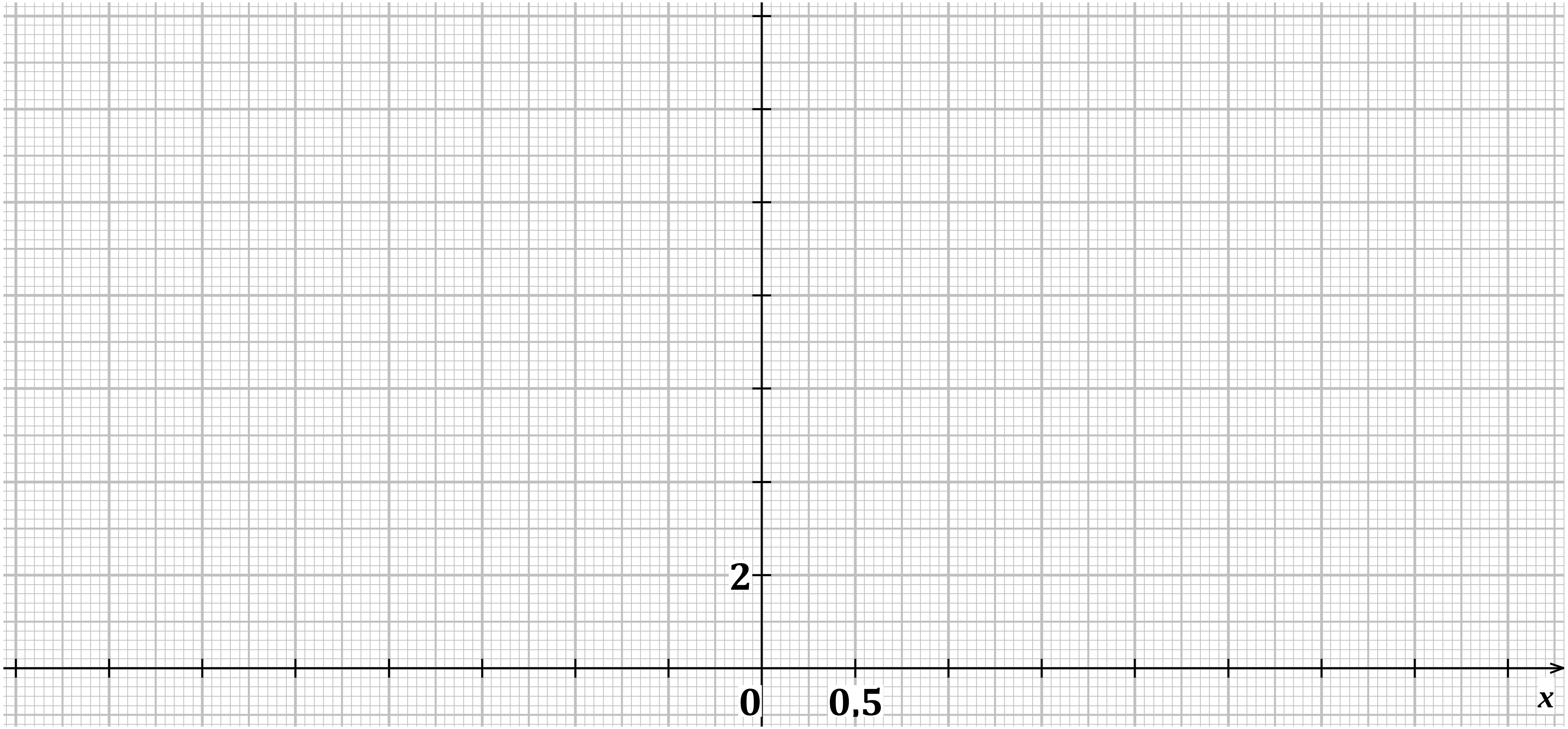
x	7	-3	0						
x^2				25	25	7	7	0	-3

▶2. Etudier le signe de la fonction f. Dresser son **tableau de signe**.

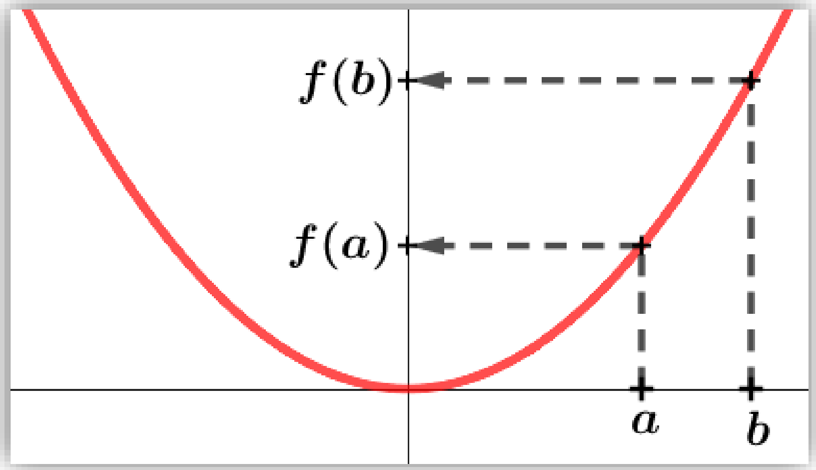
▶3. Construire le **tableau de valeurs** de la fonction f sur l'intervalle $[0; 3{,}5]$ avec un pas de $0{,}5$.

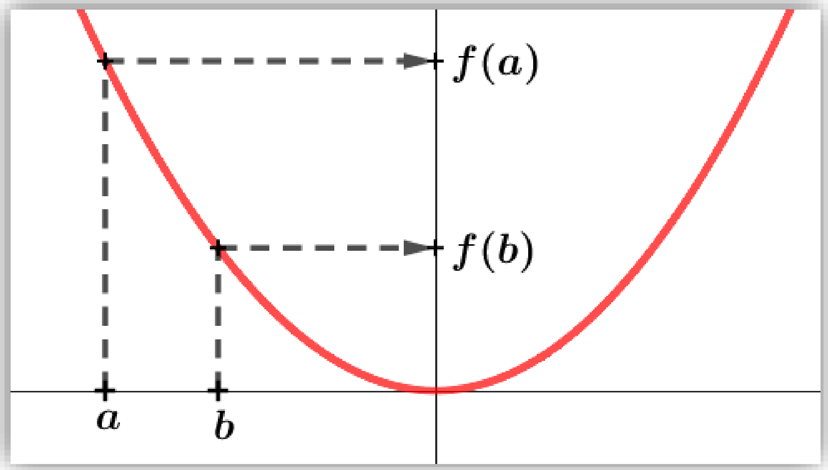
▶4. Pour tout réel x, calculer $f(-x)$. Que peut-on en déduire ?

▶5. Tracer la **représentation graphique** de la fonction f dans le repère ci-dessous :



▶6. Pour tous réels a et b tels que $0 \leq a < b$, étudier le signe de $f(a) - f(b)$. Que peut-on en déduire ?





▶7. Pour tous réels a et b tels que $a < b \leq 0$, étudier le signe de $f(a) - f(b)$. Que peut-on en déduire ?

Chap 5. Fonctions carré, cube et racine
Seconde

La fonction carré $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{array}$

TABLEAU DE SIGNE :

x	$-\infty$		$+\infty$
x^2		$+$	

TABLEAU DE VARIATIONS :

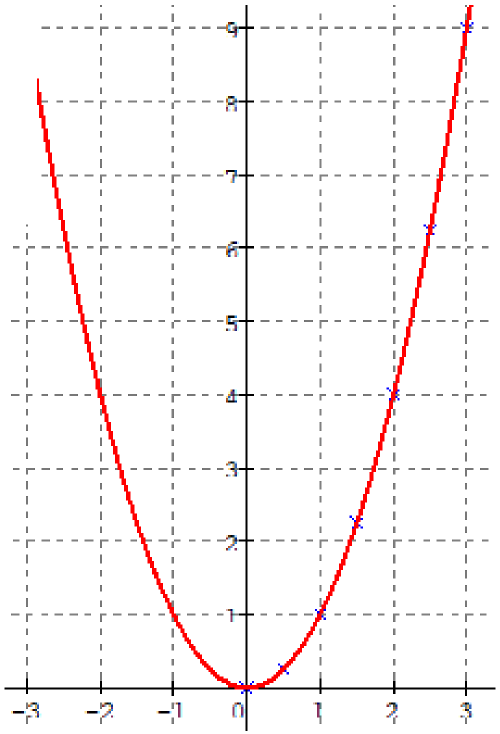
x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2	$\searrow$	0	$\nearrow$

PROPRIETE :

La fonction carré est paire donc sa courbe admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.

TABLEAU DE VALEURS ET COURBE REPRESENTATIVE :

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
x^2	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9



IDENTITES REMARQUABLES :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Exemple 2.

▶1. Développer et réduire :

$$A = (5x+3)^2 \qquad\qquad B = (2x-7)^2$$
$$C = (2-5x)^2 - (2-5x)(2+5x)$$

▶2. Factoriser :

$$E = 25x^2 + 60x + 36$$
$$F = 81x^2 - 64$$

▶**3.** Une parcelle rectangulaire a pour longueur 5 m et pour largeur 4 m. On diminue sa longueur d'une certaine longueur $x\ m$ et on augmente sa largeur d'exactement la même longueur.

Démontrer que l'aire peut s'écrire $f(x) = -\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + 20{,}25$, en déduire l'aire maximale possible.

III. La fonction racine carrée

Exemple : Résoudre $x^2 = 121$.

Définition : Pour tout $a \in [0\,;+\infty[= \mathbb{R}^+$

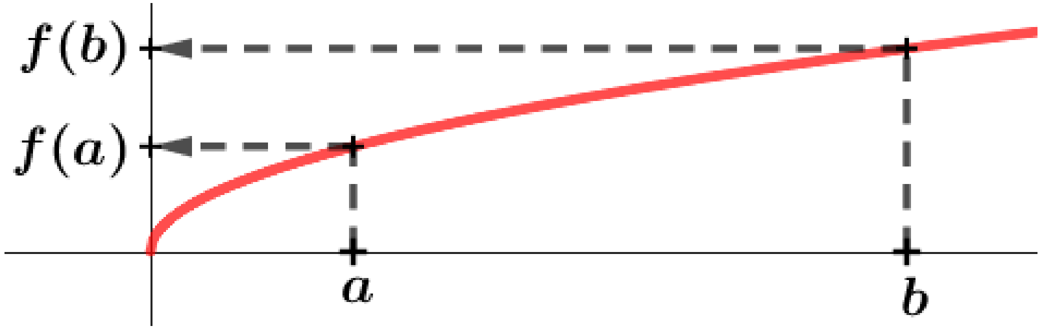
$\sqrt{a}$ est le nombre positif qui a pour carré le nombre a.

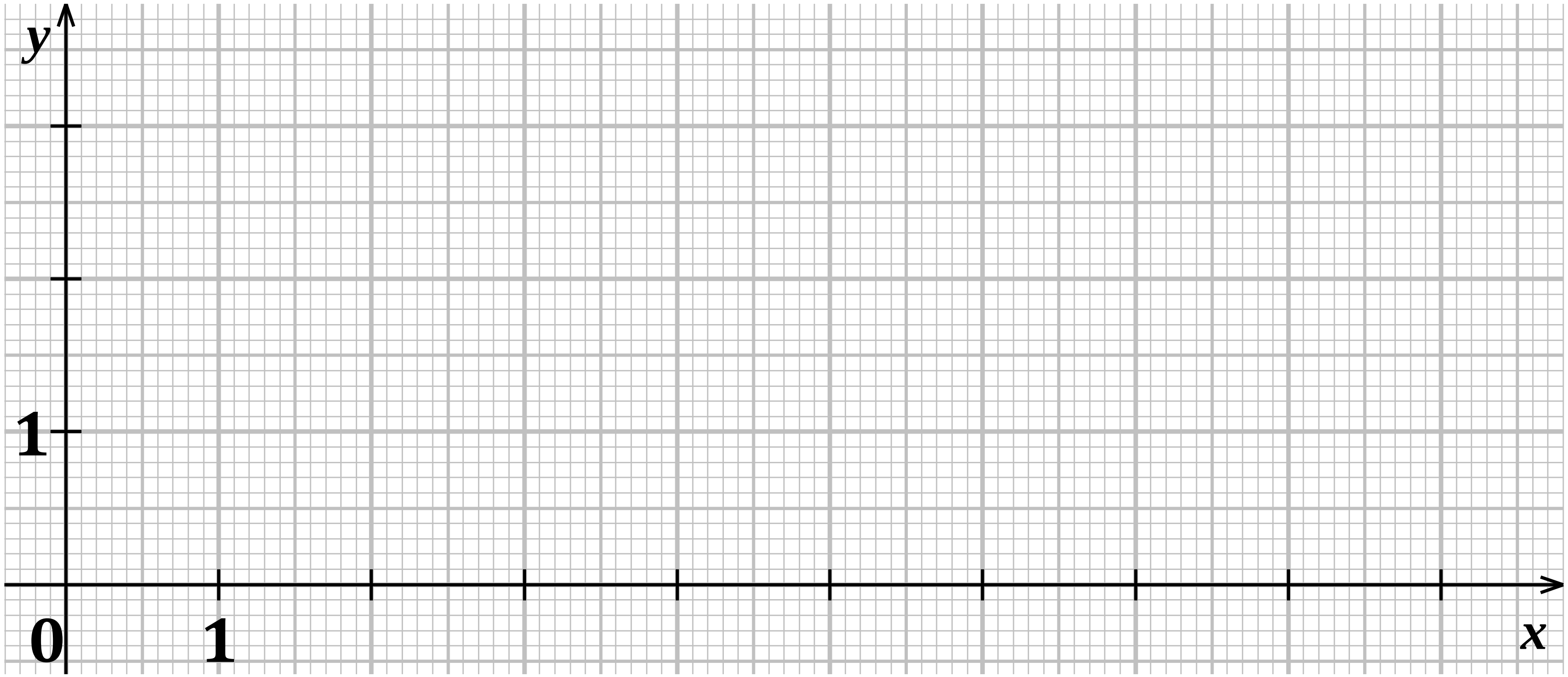
Propriété :

▶1. Démontrer que, pour tous réels positifs a et b,

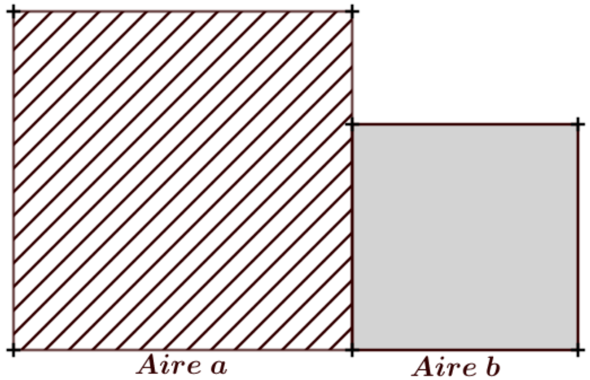
$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}.$$

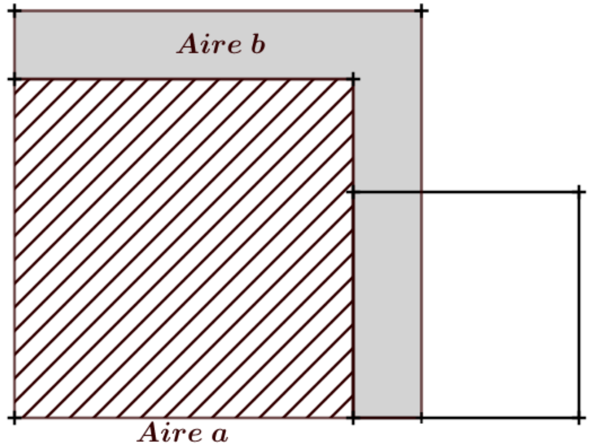
▶2. Etudier les variations de la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ définie sur $[0; +\infty[$ puis la représenter graphiquement




y
1
0
1
x

▸3. Quelle propriété peut-on déduire des figures ci-dessous ?





Chap 5. Fonctions carré, cube et racine

Seconde

La fonction racine carrée $f :: \begin{array}{l}[0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{x}\end{array}$

TABLEAU DE SIGNE :

x	0 $+\infty$
$\sqrt{x}$	$+$

TABLEAU DE VARIATIONS :

x	0 $+\infty$
$\sqrt{x}$	$0 \nearrow$

REMARQUE :

La fonction racine carrée n'est ni paire ni impaire.

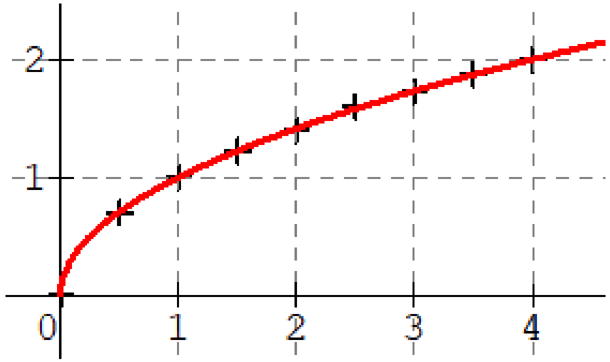


TABLEAU DE VALEURS ET COURBE REPRESENTATIVE :

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$\sqrt{x}$	0	0,7	1	1,2	1,4	1,6	1,7	1,9	2

PROPRIETES : POUR TOUS $a \geq 0$, $b > 0$

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

ATTENTION, en général $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

Exemple 3. Ecrire le plus simplement possible :

$A = \sqrt{3^2 + 4^2}$ $\qquad$ $B = \sqrt{3^2 \times 4^2}$

$\forall x \in [0\,; +\infty[,\quad C = 2\sqrt{49x} - 3\sqrt{25x}$

$\forall x \in \mathbb{R}^+,\quad D = 5\sqrt{72x^2} + 7\sqrt{128x^2}$

$E = \left(2\sqrt{7} - 3\right)^2$ $\qquad$ $\forall x \in \mathbb{R}\quad F = \left(\sqrt{6} - \sqrt{3}x\right)^2$

$G = \sqrt{\dfrac{49}{45}}$ $\qquad$ $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}\quad H = \sqrt{\dfrac{8}{162x}}$ $\qquad$ $I = \dfrac{3}{4 - \sqrt{2}}$

IV. La fonction cube

Soit la fonction définie par, pour tout réel x, $f(x) = x^3$.

▶ 1. Compléter le tableau ci-contre :

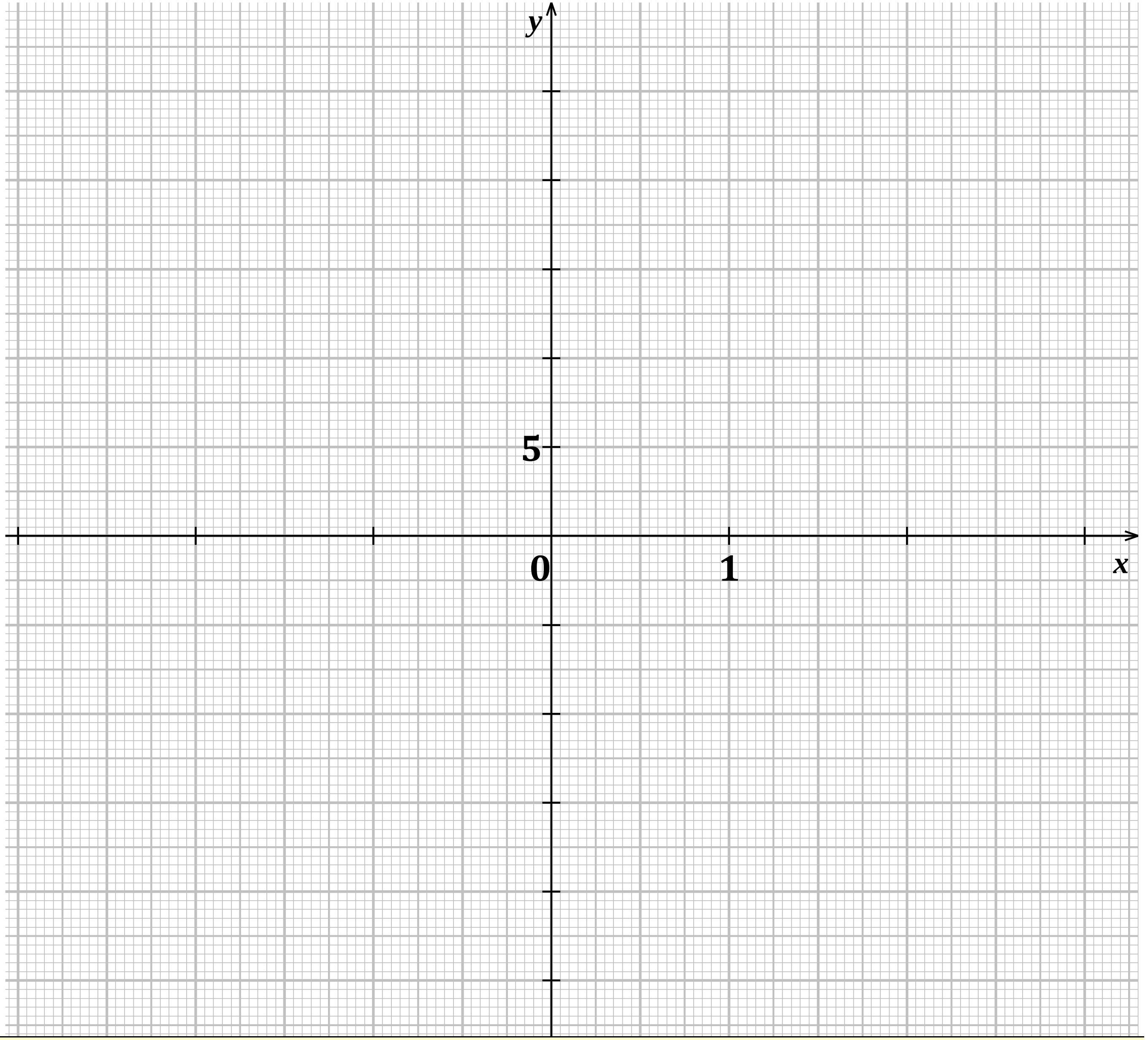
x	0	1	-2				
x^3				27	-64	0	$3{,}375$

▶ 2. Etudier le signe de la fonction f. Dresser son **tableau de signe**.

▶ 3. Dresser le **tableau de valeurs** de f sur l'intervalle $[0; 3]$ avec un pas de 0,5.

▶ 4. Pour tout réel x, calculer $f(-x)$. Que peut-on en déduire ?

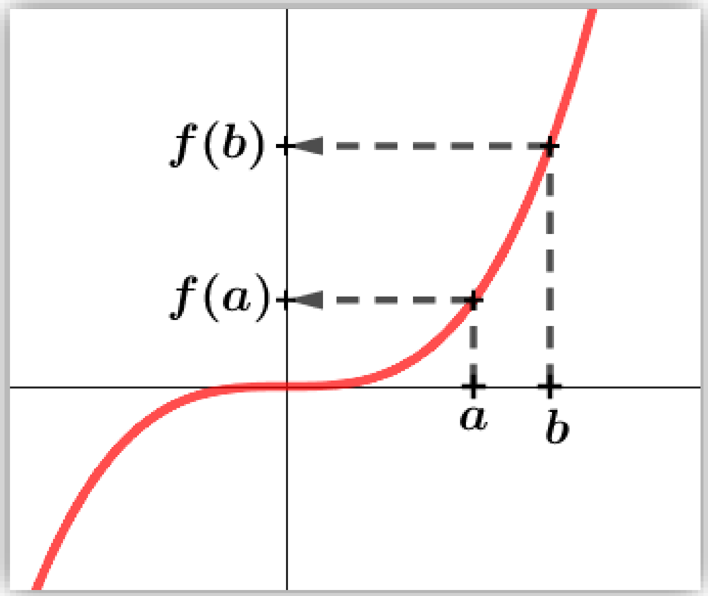
▶ 5. Tracer la **représentation graphique** de la fonction f dans le repère ci-dessous :



▶ 6. Développer $(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

En déduire le signe de $f(a)-f(b)$ lorsque $0 \leq a < b$.

Que peut-on en déduire ?



Chap 5. Fonctions carré, cube et racine
Seconde

La fonction cube $\quad f: \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^3 \end{array}$

TABLEAU DE SIGNE :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^3		$-$	0	$+$	

TABLEAU DE VARIATIONS :

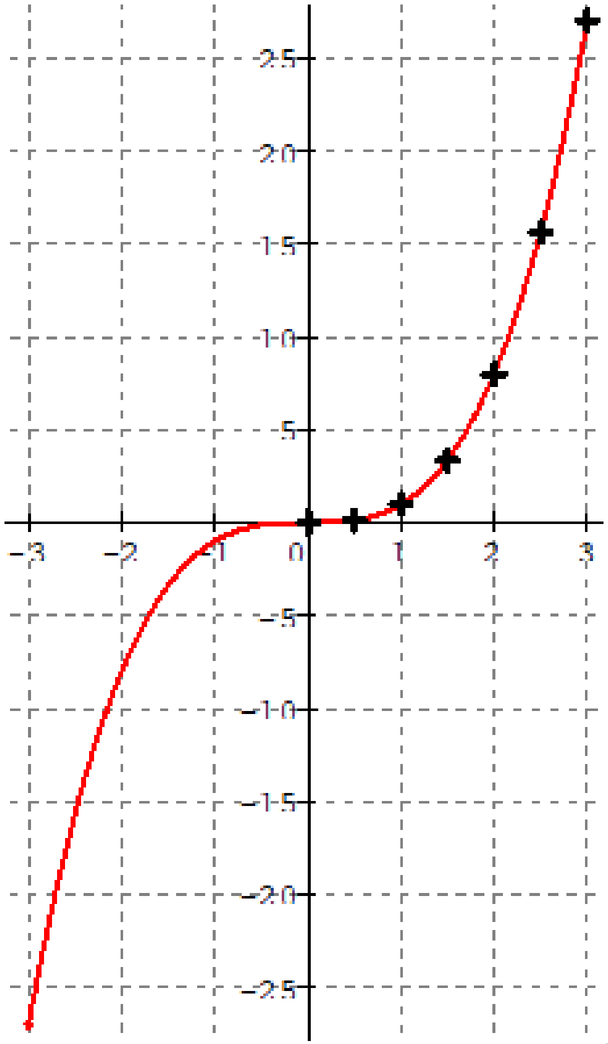
x	$-\infty$	$+\infty$
x^3	↗	

PROPRIETE :

La fonction cube est impaire donc sa courbe admet l'origine pour centre de symétrie.

TABLEAU DE VALEURS ET COURBE REPRESENTATIVE :

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
x^3	0	0,125	1	3,375	8	15,625	27



Exemple 4.
Développer, réduire et ordonner :

$$\boldsymbol{A = x(2x+3)(1-5x)}$$

$$\boldsymbol{B = (2x+3)^2 - (1+2x^2)(3x-5)}$$

$$\boldsymbol{C = \sqrt{5}\left(14 - 2\sqrt{5}\right)^2}$$

$$\boldsymbol{D = \left(2 - \sqrt{3}\right)^3}$$

x^2 se balade dans la forêt.
Quand il ressort il ne reste que x. Pourquoi ?
– Il a trébuché sur une racine.

- Tu veux une blague ?
- Oui
- $6x^2+3x+2$
- Je n'ai pas compris ?
- Normal, c'est du second degré