Vendredi 7 octobre 2022
Maths Expertes ➡ Contrôle n° $\boxed{1}$

Exercice 1. (9 points)

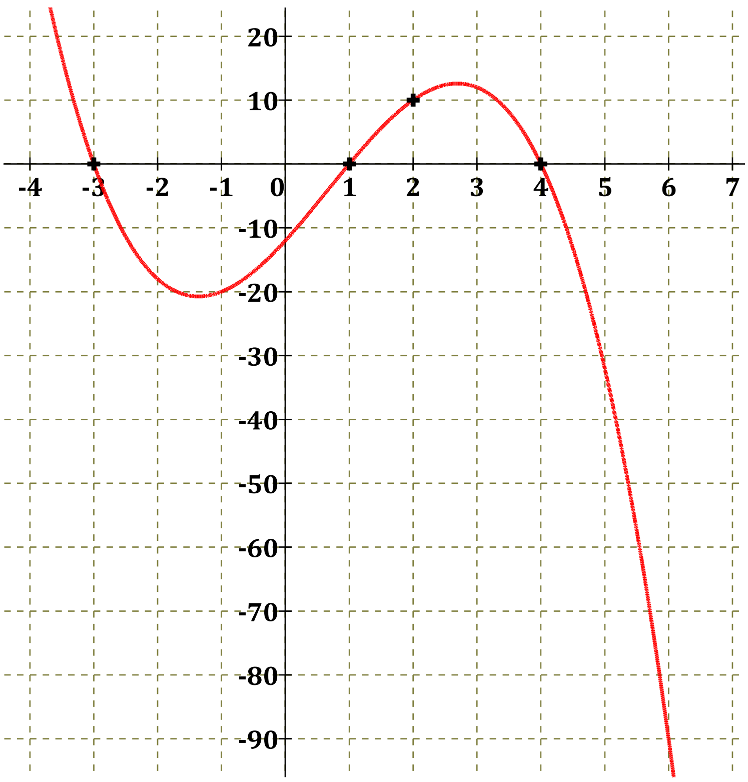
Dans le repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ ci-contre, on a représenté une fonction f polynôme de degré 3.

▶ 1. A l'aide des points placés sur le graphique, déterminer l'expression algébrique de la fonction f. *On détaillera la méthode.*

▶ 2 a) Résoudre l'équation

$$-x^3 + 2x^2 + 21x + 18 = 0.$$

b) En déduire tous les points d'intersection entre la courbe de f et la droite $y = -10x - 30$.



Exercice 1.	**1.**	D'après le graphique, la courbe de la fonction polynôme de degré 3 f passe par les points de coordonnées : $(-3; 0)$, $(1; 0)$, $(2; 10)$ et $(4; 0)$. J'en déduis que le polynôme f admet -3, 1 et 4 comme racines. Le polynôme f peut donc s'écrire sous forme factorisée avec $a \in \mathbb{R}$: $f(x) = a\big(x - (-3)\big)(x - 1)(x - 4) = a(x + 3)(x - 1)(x - 4)$ Or, puisque la courbe de f passe par le point de coordonnées $(2; 10)$, on sait que $f(2) = 10$ où $f(2) = a(2 + 3)(2 - 1)(2 - 4) = a \times 5 \times 1 \times (-2) = -10a$ J'en déduis que $-10a = 10$, donc $a = \frac{10}{-10} = -1$. Par conséquent $\boldsymbol{f(x) = -(x + 3)(x - 1)(x - 4)}$

Exercice 1.

2a.

Je remarque que l'équation $-x^3 + 2x^2 + 21x + 18 = 0$ admet une solution évidente avec $x = -1$, en effet :
$-(-1)^3 + 2 \times (-1)^2 + 21 \times (-1)^3 + 18 = 1 + 2 - 21 + 18 = 0$

Le polynôme $-x^3 + 2x^2 + 21x + 18$ peut donc être factorisé par $\big(x - (-1)\big) = (x + 1)$

---

factoriser le polynôme, PAR DIVISION :

$$
\begin{array}{rrrr|l}
-x^3 & +2x^2 & +21x & +18 & x \quad +1 \\
\cline{5-5}
-(-x^3 & -x^2) & & & -x^2 \ +3x \quad +18 \\
\cline{1-2}
 & 3x^2 & +21x & +18 & \\
 & -(3x^2 & +3x) & & \\
\cline{2-3}
 & & 18x & +18 & \\
 & & -(18x & +18) & \\
\cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}
$$

On en déduit que, pour tout réel x :

$$-x^3 + 2x^2 + 21x + 18 = (x + 1)(-x^2 + 3x + 18)$$

OU BIEN factoriser le polynôme, PAR IDENTIFICATION :

$$-x^3 + 2x^2 + 21x + 18 = (x + 1)(ax^2 + bx + c)$$

$$= ax^3 + bx^2 + cx + ax^2 + bx + c$$

$$= ax^3 + (b + a)x^2 + (c + b)x + c$$

Par unicité de l'écriture d'un polynôme sous forme développée réduite, on obtient :

$$\boldsymbol{-x^3 + 2x^2 + 21x + 18 = ax^3 + (b + a)x^2 + (c + b)x + c}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{a = -1} \\ \boldsymbol{b + a = 2} \\ \boldsymbol{c + b = 21} \\ \boldsymbol{c = 18} \end{cases}$$

On en déduit que $a = -1, b = 3 \ et \ c = 18$.
et donc, pour tout réel x :

$$-x^3 + 2x^2 + 21x + 18 = (x + 1)(-x^2 + 3x + 18)$$

Déterminons les racines du polynôme $-x^2 + 3x + 18$

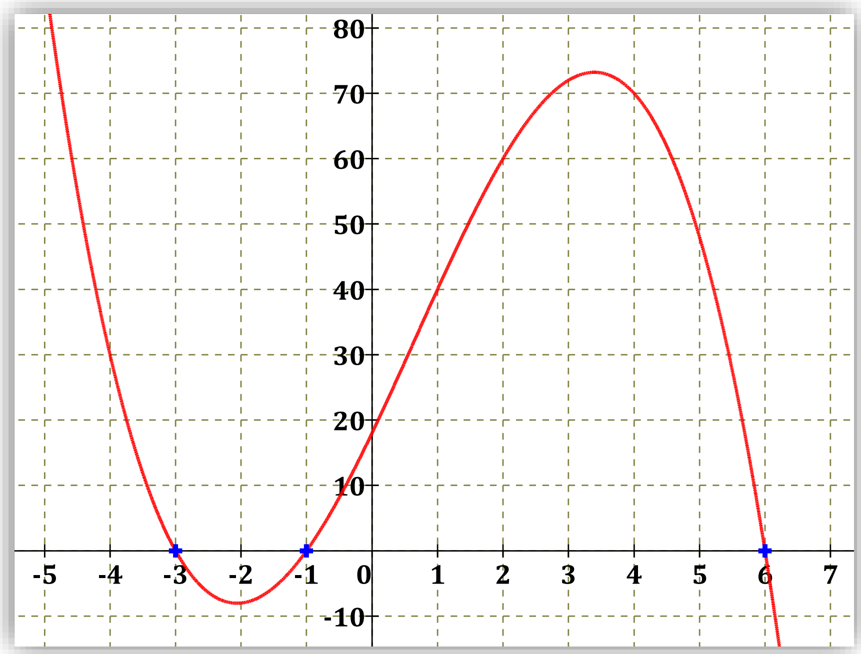
$$\Delta = 3^2 - 4 \times (-18) = 81 > 0$$

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>

$$x_1 = \frac{-3-9}{-2} = \frac{-12}{-2} = 6 \quad \text{ou} \quad x_2 = \frac{-3+9}{-2} = \frac{6}{-2} = -3$$

J'en déduis que $-x^3 + 2x^2 + 21x + 18 = -(x+1)(x-6)(x+3)$

L'équation $-x^3 + 2x^2 + 21x + 18 = 0$ possède donc 3 solutions $-3, -1$ et 6.



</td>
</tr>
<tr>
<td>Exercice 1.</td>
<td>2b.</td>
<td>

Pour déterminer les points d'intersection entre la courbe de f et la droite $y = -10x - 30$, on résout

$$f(x) = -10x - 30$$

$$\Leftrightarrow -(x+3)(x-1)(x-4) = -10x - 30$$

$$\Leftrightarrow -(x^2 - x + 3x - 3)(x-4) = -10x - 30$$

$$\Leftrightarrow -(x^2 + 2x - 3)(x-4) = -10x - 30$$

$$\Leftrightarrow -(x^3 - 4x^2 + 2x^2 - 8x - 3x + 12) = -10x - 30$$

$$\Leftrightarrow -(x^3 - 2x^2 - 11x + 12) = -10x - 30$$

$$\Leftrightarrow -x^3 + 2x^2 + 11x - 12 - (-10x - 30) = 0$$

$$\Leftrightarrow -x^3 + 2x^2 + 11x - 12 + 10x + 30 = 0$$

$$\Leftrightarrow -x^3 + 2x^2 + 21x + 18 = 0$$

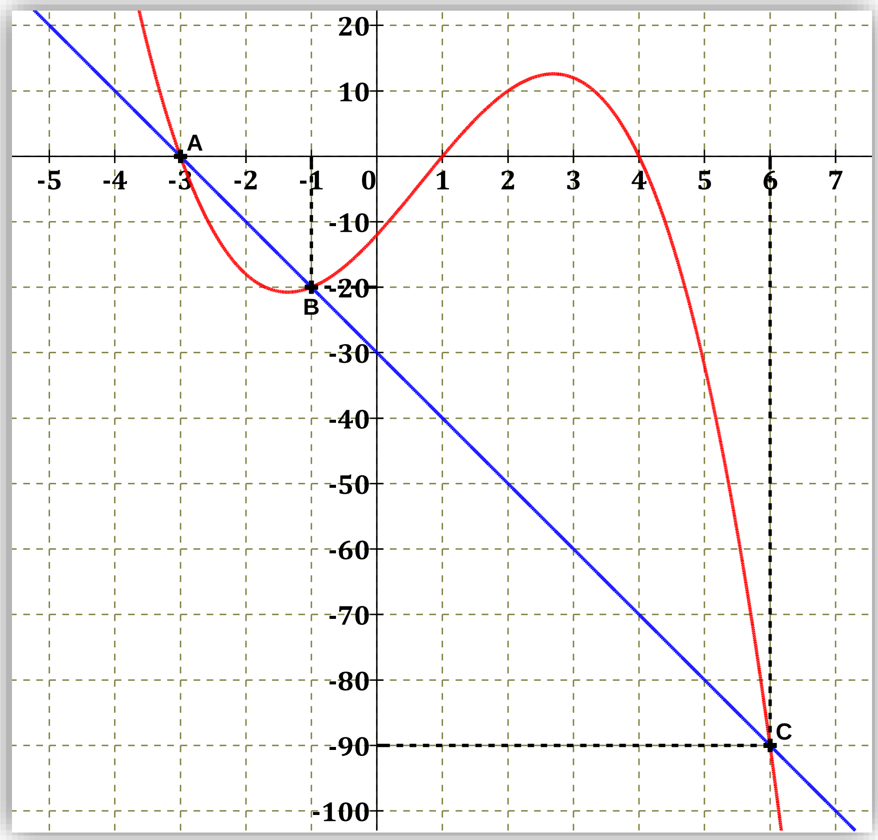
D'après la question précédente, il y a trois points d'intersection.

$$y = -10 \times (-3) - 30 = 0 \qquad A(-3; 0)$$

$$y = -10 \times (-1) - 30 = -20 \qquad B(-1; -20)$$

$$y = -10 \times 6 - 30 = -90 \qquad C(6; -90)$$

</td>
</tr>
</table>

Exercice 2. (10 points)

►1. On considère les nombres complexes suivants : $z_1 = -1 + i$ et $z_2 = 3 - 4i$.

$a)$ Ecrire sous forme algébrique $A = z_1 + z_2$ et $B = z_1 - z_2$.

$b)$ Ecrire sous forme algébrique $C = (z_1)^2$ et $D = z_1 \times z_2$.

$c)$ Ecrire sous forme algébrique $E = \dfrac{z_1}{z_2}$.

►2. On considère les nombres complexes suivants : $z = 1 + \sqrt{3}\, i$.

$a)$ Ecrire sous forme algébrique $\left(1 + \sqrt{3}\, i\right)^3$.

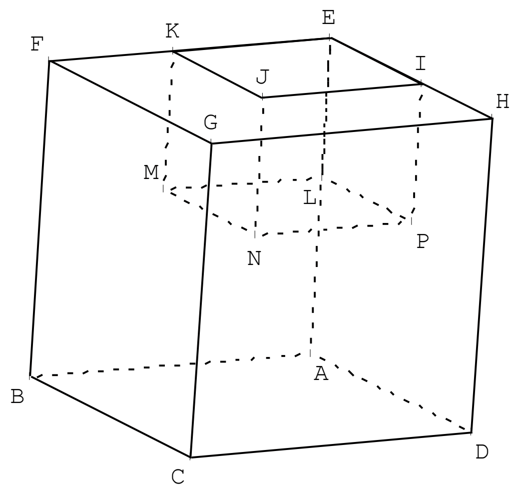
$b)$ L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ?

« Le nombre $\left(\mathbf{1} + \sqrt{\mathbf{3}}\, \boldsymbol{i}\right)^{\mathbf{2022}}$ est un nombre réel négatif. »

Exercice 2.	**1a.**	$A = z_1 + z_2 = \mathbf{-1 + \boldsymbol{i} + 3 - 4\boldsymbol{i}} = \mathbf{2 - 3\boldsymbol{i}}$ $B = z_1 - z_2 = (-1 + i) - (3 - 4i) = \mathbf{-1 + \boldsymbol{i} - 3 + 4\boldsymbol{i}} = \mathbf{-4 + 5\boldsymbol{i}}$
	1b.	**IDENTITES REMARQUABLES :** $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 + 2\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{b}^2$ $(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 - 2\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{b}^2$ $C = (z_1)^2 = (-1 + i)^2$ $C = (-1)^2 + 2 \times (-1) \times i + i^2 = 1 - 2i - 1$ $\boldsymbol{C = -2i}$

		$D = z_1 \times z_2 = (-1+i)(3-4i)$ $D = -3 + 4i + 3i - 4i^2$ $D = -3 + 7i + 4$ $\boldsymbol{D = 1 + 7i}$
	1c.	$E = \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{-1+i}{3-4i}$ $E = \dfrac{(-1+i) \times (\mathbf{3+4i})}{(3-4i) \times (\mathbf{3+4i})}$ $E = \dfrac{-3-4i+3i+4i^2}{9-16i^2}$ $E = \dfrac{-3-i-4}{9+16}$ $\boldsymbol{E = \dfrac{-7-i}{25}}$
	2a.	**IDENTITES REMARQUABLES :** $\boldsymbol{(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$ $\boldsymbol{(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}$ $\left(1+\sqrt{3}\,i\right)^3 = 1^3 + 3 \times 1^2 \times \sqrt{3}\,i + 3 \times 1 \times \sqrt{3}^2\, i^2 + \sqrt{3}^3\, i^3$ $\left(1+\sqrt{3}\,i\right)^3 = 1 + 3\sqrt{3}\,i - 3 \times 3 - 3\sqrt{3}i$ $\left(1+\sqrt{3}\,i\right)^3 = 1 - 9$ $\boldsymbol{\left(1+\sqrt{3}\,i\right)^3 = -8}$
	2b.	**« Le nombre $\boldsymbol{\left(1+\sqrt{3}\,i\right)^{2022}}$ est un nombre réel négatif. »** $\left(1+\sqrt{3}\,i\right)^{2022} = \left(\left(1+\sqrt{3}\,i\right)^3\right)^{674} = (-8)^{674} = 8^{674} > 0$ **L'affirmation est fausse.**

Exercice 3. (1 point)



On considère le cube $ABCDEFGH$ d'arête 6 cm. On inscrit dans ce cube, le parallélépipède rectangle $EIJKLPNM$ tel que $EI = EK = x$ et $AL = x$.

▶ 1. On désigne par V le volume du parallélépipède. Montrer que V est donné par la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 6]$ par $f(x) = -x^3 + 6x^2$.

▶ 2. Déterminer toutes les valeurs de x pour lesquelles le volume du parallélépipède vaut 5 cm³.

<table>
<tr>
<td rowspan="2">Exercice 2.</td>
<td>1.</td>
<td>Le parallélépipède rectangle $EIJKLPNM$ a pour dimensions :
Longueur et largeur : $EI = EK = x$
Hauteur : $EL = 6 - AL = 6 - x$
Le volume V s'écrit alors :
$$V = L \times l \times h = x \times x \times (6 - x)$$
$$V = x^2(6 - x)$$
$$\boldsymbol{V = 6x^2 - x^3}$$</td>
</tr>
<tr>
<td>2.</td>
<td>Je résous : $f(x) = -x^3 + 6x^2 = 5$.
$$-x^3 + 6x^2 - 5 = 0$$
Une racine évidente est 1.
Je cherche alors le nombre b tel que :
$$-x^3 + 6x^2 - 5 = (x - 1)(-x^2 + bx + 5)$$
$$-x^3 + 6x^2 - 5 = -x^3 + bx^2 + 5x + x^2 - bx - 5$$
$$-x^3 + 6x^2 - 5 = -x^3 + (b + 1)x^2 + (5 - b)x - 5$$
Par identification, $\begin{cases} b + 1 = 6 \\ 5 - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow b = 5$
$$-x^3 + 6x^2 - 5 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x - 1)(-x^2 + 5x + 5) = 0$$</td>
</tr>
</table>

$$\Delta = 25 - 4 \times (-5) = 45$$

$$x_1 = \frac{-5-\sqrt{45}}{-2} = \frac{5+3\sqrt{5}}{2} \approx 5{,}85$$

$$x_2 = \frac{-5+\sqrt{45}}{-2} = \frac{5-3\sqrt{5}}{2} \approx -0{,}85 \text{ exclu car } x \in [0;6].$$

Le volume du parallélépipède vaut 5 cm³

pour $x = 1$

et pour $x = \dfrac{5+3\sqrt{5}}{2} \approx 5{,}85$