Lycée Polyvalent Albert EINSTEIN

Vendredi 16 décembre 2022
Maths Expertes ➡ Contrôle n° 3

Table des matières

Sujet ... 2
Exercice 1. (10 points) ... 2
Exercice 2. (10 points) ... 2
CORRECTION du contrôle n° 3 ... 3
Correction du Sujet ... 3
Exercice 1. (10 points) ... 3
Exercice 2. (10 points) ... 4

Maths Expertes ➡ Contrôle n° 3

Sujet

Exercice 1. (10 points)

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en démontrant votre réponse. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

Proposition 1 : Si $n \equiv 1 \ [5]$ alors $n^2 + n + 3 \equiv 0 \ [5]$.

Proposition 2 : La réciproque de la proposition 1.

On pourra s'aider du tableau ci-dessous :

$n \equiv \cdots \ [5]$					
$n^2 \equiv \cdots \ [5]$					
$n^2 + n + 3 \equiv \cdots \ [5]$					

Proposition 3 : Le chiffre des unités de 2023^{2022} est 1.

Proposition 4 : Si $x \equiv 1 \ [6]$ alors $3x + 2 \equiv 5 \ [6]$.

Proposition 5 : La réciproque de la proposition 4.

Exercice 2. (10 points)

▶1a) Déterminer le reste de la division euclidienne de 4^3 par 5.

b) Pour tout entier naturel n, en déduire que :

- si n est pair alors $4^{3n} \equiv 1 \ [5]$
- et si n est impair alors $4^{3n} \equiv 4 \ [5]$.

▶2. Pour tout entier naturel n, on pose $A = 6^n + 13^{n+1}$.

Démontrer que, pour tout entier naturel n, A est divisible par 7.

↑

CORRECTION du contrôle n° $\boxed{3}$

Correction du Sujet

Exercice 1. (10 points)

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en démontrant votre réponse. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

Proposition 1 : Si $n \equiv 1 \ [5]$ alors $n^2 + n + 3 \equiv 0 \ [5]$.

Proposition 2 : La réciproque de la proposition 1.

On pourra s'aider du tableau ci-dessous :

$n \equiv \cdots \ [5]$					
$n^2 \equiv \cdots \ [5]$					
$n^2 + n + 3 \equiv \cdots \ [5]$					

Proposition 3 : Le chiffre des unités de 2023^{2022} est 1.

Proposition 4 : Si $x \equiv 1 \ [6]$ alors $3x + 2 \equiv 5 \ [6]$.

Proposition 5 : La réciproque de la proposition 4.

Exercice 1.

1.

Proposition 1 : Si $n \equiv 1 \ [5]$ alors $n^2 + n + 3 \equiv 0 \ [5]$.

Supposons que $n \equiv 1 \ [5]$ alors $n^2 \equiv 1 \ [5]$.
donc $n^2 + n + 3 \equiv 1 + 1 + 3 \equiv 5 \ [5]$.
et donc $n^2 + n + 3 \equiv 0 \ [5]$

La proposition 1 est vraie.

2.

Proposition 2 : La réciproque de la proposition 1
C'est-à-dire : Si $n^2 + n + 3 \equiv 0 \ [5]$ alors $n \equiv 1 \ [5]$.

$n \equiv \cdots \ [5]$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
$n^2 \equiv \cdots \ [5]$	**0**	**1**	**4**	**4**	**1**
$n^2 + n + 3 \equiv \cdots \ [5]$	**3**	**0**	**4**	**0**	**3**

D'après le tableau de congruence ci-dessus, **la proposition 2 est fausse**, $n = 3$ en est un contre-exemple.
$n \equiv 3 \ [5]$
donc $n^2 \equiv 9 \ [5] \equiv 4 \ [5]$
donc $n^2 + n + 3 \equiv 4 + 3 + 3 \ [5] \equiv 10 \ [5] \equiv 0 \ [5]$
donc $n^2 + n + 3 \equiv 0 \ [5]$ mais $n \not\equiv 1 \ [5]$

Exercice 1.

3.

Proposition 3 : Le chiffre des unités de 2023^{2022} est 1.

$$2023 \equiv 3 \ [10]$$
$$3^3 = 27 \equiv 7 \ [10]$$
$$3^4 \equiv 21 \ [10] \equiv 1 \ [10]$$

or $2022 = 4 \times 505 + 2$

$$(3^4)^{505} = 3^{2020} \equiv 1 \ [10]$$
$$3^{2022} \equiv 3^2 \ [10] \equiv 9 \ [10]$$
$$2023^{2022} \equiv 3^{2022} \ [10] \equiv 9 \ [10]$$

Le chiffre des unités de 2023^{2022} est donc 9.

La proposition 3 est fausse.

4.

Proposition 4 : Si $x \equiv 1 \ [6]$ alors $3x + 2 \equiv 5 \ [6]$.

Supposons que $x \equiv 1 \ [6]$

alors $3x \equiv 3 \ [6]$

et donc $3x + 2 \equiv 5 \ [6]$

La proposition 4 est donc vraie.

5.

Proposition 5 : La réciproque de la proposition 4.

C'est-à-dire Si $3x + 2 \equiv 5 \ [6]$ alors $x \equiv 1 \ [6]$.

$x \equiv \cdots \ [6]$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
$3x \equiv \cdots \ [6]$	**0**	**3**	**0**	**3**	**0**	**3**
$3x + 2 \equiv \cdots \ [6]$	**2**	**5**	**2**	**5**	**2**	**5**

D'après le tableau de congruence ci-dessus, **la proposition 5 est fausse**, $x = 5$ en est un contre-exemple.

$x \equiv 5 \ [6]$

donc $3x = 15 \equiv 3 \ [6]$

donc $3x + 2 \equiv 3 + 2 \ [6] \equiv 5 \ [6]$

$$\text{donc } 3x + 2 \equiv 5 \ [6] \text{ mais } x \not\equiv 1 \ [6]$$

Exercice 2. (10 points)

▶ 1a) Déterminer le reste de la division euclidienne de 4^3 par 5.

b) Pour tout entier naturel n, en déduire que :

- si n est pair alors $4^{3n} \equiv 1 \ [5]$
- et si n est impair alors $4^{3n} \equiv 4 \ [5]$.

▶ 2. Pour tout entier naturel n, on pose $A = 6^n + 13^{n+1}$.

Démontrer que, pour tout entier naturel n, A est divisible par 7.

<table>
<tr><td rowspan="3">**Exercice 2.**</td><td>**1a**</td><td>$4^3 = 64 = 12 \times 5 + 4$ donc $4^3 \equiv 4\ [5]$</td></tr>
<tr><td>**1b**</td><td>J'en déduis que $4^3 \equiv -1\ [5]$ et donc que $\forall n \in \mathbb{N},\ \ 4^{3n} \equiv (-1)^n\ [5]$
• si n est pair alors $4^{3n} \equiv 1\ [5]$
• et si n est impair alors $4^{3n} \equiv -1\ [5] \equiv 4\ [5]$.</td></tr>
<tr><td>**2.**</td><td>Pour tout entier naturel n, on pose $A = 6^n + 13^{n+1}$,

$6 \equiv -1\ [7]$ et $13 \equiv -1\ [7]$
donc $\forall n \in \mathbb{N},\ \ 6^n + 13^{n+1} \equiv (-1)^n + (-1)^{n+1}\ [7]$
• si n est pair alors $A \equiv 1 - 1\ [7] \equiv 0\ [7]$
• et si n est impair alors $A \equiv -1 + 1\ [7] \equiv 0\ [7]$.
Dans tous les cas, pour tout entier naturel n, $A = 6^n + 13^{n+1}$ est divisible par 7.</td></tr>
</table>