# Mercredi 15 février 2023
# Maths Expertes ➡ Contrôle n° 4

## Table des matières

# Maths Expertes ➡ Contrôle n° 4

## Enoncé du sujet

### Exercice 1. (10 points)

▶ 1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 2 = 0$.

▶ 2. On considère les nombres complexes $z_1 = 1 - i$ et $z_2 = -8 - 8\sqrt{3}i$.

On pose $Z = \dfrac{z_1}{z_2}$

a) Ecrire $Z$ sous forme algébrique.

b) Ecrire $z_1$ et $z_2$ sous forme trigonométrique.

c) Déterminer la forme trigonométrique de $Z$.

d) En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

### Exercice 2. (10 points)

*Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation*

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

▶ 1. Soient $A$ et $B$ les points d'affixe $z_A = 2 - 5i$ et $z_B = 7 - 3i$

**Proposition 1 :** Le triangle $OAB$ est rectangle et isocèle.

▶ 2. Soit $z = 3 - i\sqrt{3}$

**Proposition 2 :** Pour tout entier naturel $n$ non nul, $z^{3n}$ est un imaginaire pur.

▶ 3. Soit $z$ un nombre complexe non nul,

**Proposition 3 :** Si le module de $z$ est égal à 1 alors $z + \frac{1}{z}$ est un nombre réel.

▶ 4.

**Proposition 4 :** L'équation $z^5 + z - i + 1 = 0$ admet une solution réelle.

# CORRECTION du contrôle n° $\boxed{4}$
## Correction du Sujet

### Exercice 1. (10 points)

▶ 1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 2 = 0$.

▶ 2. On considère les nombres complexes $z_1 = 1 - i$ et $z_2 = -8 - 8\sqrt{3}i$.

On pose $Z = \dfrac{z_1}{z_2}$

a) Ecrire $Z$ sous forme algébrique.

b) Ecrire $z_1$ et $z_2$ sous forme trigonométrique.

c) Déterminer la forme trigonométrique de $Z$.

d) En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

| | | |
|---|---|---|
| **Exercice 1.** | **1.** | $$z^2 - 2z + 2 = 0$$ $$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 4 - 8 = -4 < 0$$ Il y a donc deux solutions complexes conjuguées : $$z_1 = \frac{2 - i\sqrt{4}}{2} = \frac{2 - 2i}{2} = \frac{2}{2} - \frac{2i}{2} = 1 - i$$ $$z_2 = 1 + i$$ |
| | **2a** | $Z = \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{1 - i}{-8 - 8\sqrt{3}i}$ <br> $Z = \dfrac{(1 - i)\left(-8 + 8\sqrt{3}i\right)}{\left(-8 - 8\sqrt{3}i\right)\left(-8 + 8\sqrt{3}i\right)}$ <br> $Z = \dfrac{-8 + 8\sqrt{3}i + 8i - 8\sqrt{3}i^2}{64 - 64 \times 3 \times i^2}$ <br> $Z = \dfrac{-8 + 8\sqrt{3}i + 8i + 8\sqrt{3}}{64 + 192}$ <br> $\boldsymbol{Z = \dfrac{8\sqrt{3} - 8 + i\left(8\sqrt{3} + 8\right)}{256}}$ |
| | **2b** | **❶ Module de $z_1 = 1 - i$ :** <br> $\lvert z_1 \rvert = \lvert 1 - i \rvert = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ <br> **❷ Argument de $z_1 = 1 - i$ :** $$z_1 = 1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$$ $$z_1 = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \boldsymbol{\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) i\right)}$$ |

| | | |
|---|---|---|
| | **2b** | **❸ Module de $z_2=-8-8\sqrt{3}i$** <br> $\lvert z_2\rvert=\lvert -8-8\sqrt{3}i\rvert=\sqrt{(-8)^2+\left(-8\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{64+64\times 3}=\sqrt{256}=16$ <br> **❹ Argument de $z_2=-8-8\sqrt{3}i$** <br> $z_2=-8-8\sqrt{3}i=16\left(-\frac{8}{16}-\frac{8\sqrt{3}}{16}i\right)$ <br> $z_2=16\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\mathbf{16}\left(\mathbf{cos}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+\mathbf{sin}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\boldsymbol{i}\right)$ |
| | **2c** | **❶ Module de $Z=\frac{z_1}{z_2}$ :** <br> $\lvert Z\rvert=\left\lvert\frac{z_1}{z_2}\right\rvert=\frac{\lvert z_1\rvert}{\lvert z_2\rvert}=\frac{\sqrt{2}}{16}$ <br> **❷ Argument de $Z=\frac{z_1}{z_2}$ :** <br> $\arg(Z)=\arg(z_1)-\arg(z_2)\ [2\pi]$ <br> $\arg(Z)=-\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\ [2\pi]$ <br> $\arg(Z)=-\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$ <br> $\arg(Z)=\frac{-3\pi+8\pi}{12}\ [2\pi]$ <br> $\arg(Z)=\frac{5\pi}{12}\ [2\pi]$ <br> $\boldsymbol{Z}=\frac{\sqrt{2}}{16}\left(\mathbf{cos}\left(\frac{5\pi}{12}\right)+\mathbf{sin}\left(\frac{5\pi}{12}\right)\boldsymbol{i}\right)$ |
| | **2d** | $Z=\frac{8\sqrt{3}-8+i\left(8\sqrt{3}+8\right)}{256}=\frac{\sqrt{2}}{16}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)i\right)$ <br> Par identification entre parties réelle et imaginaires, on obtient : <br> $\begin{cases}\frac{\sqrt{2}}{16}\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{8\sqrt{3}-8}{256}\\ \frac{\sqrt{2}}{16}\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{8\sqrt{3}+8}{256}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{8\sqrt{3}-8}{256}\times\frac{16}{\sqrt{2}}\\ \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{8\sqrt{3}+8}{256}\times\frac{16}{\sqrt{2}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{8\sqrt{3}-8}{16\sqrt{2}}\\ \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{8\sqrt{3}+8}{16\sqrt{2}}\end{cases}$ <br> $\Leftrightarrow\begin{cases}\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{\left(8\sqrt{3}-8\right)\times\sqrt{2}}{16\sqrt{2}\times\sqrt{2}}\\ \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{\left(8\sqrt{3}+8\right)\times\sqrt{2}}{16\sqrt{2}\times\sqrt{2}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{8\sqrt{6}-8\sqrt{2}}{16\times 2}\\ \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{8\sqrt{6}+8\sqrt{2}}{16\times 2}\end{cases}$ <br> $\Leftrightarrow\begin{cases}\mathbf{cos}\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\\ \mathbf{sin}\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{cases}$ |

## Exercice 2. (10 points)

*Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation*

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{u};\vec{v})$.

► 1. Soient $A$ et $B$ les points d'affixe $z_A = 2 - 5i$ et $z_B = 7 - 3i$

**Proposition 1 :** Le triangle $OAB$ est rectangle et isocèle.

► 2. Soit $z = 3 - i\sqrt{3}$

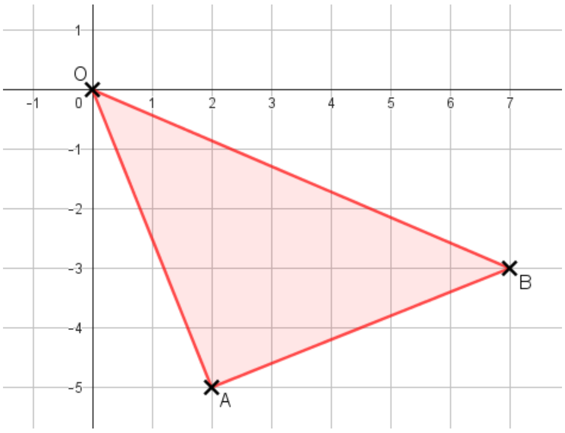
**Proposition 2 :** Pour tout entier naturel $n$ non nul, $z^{3n}$ est un imaginaire pur.

► 3. Soit $z$ un nombre complexe non nul,

**Proposition 3 :** Si le module de $z$ est égal à 1 alors $z + \frac{1}{z}$ est un nombre réel.

► 4.

**Proposition 4 :** L'équation $z^5 + z - i + 1 = 0$ admet une solution réelle.

<table>
<tr>
<td rowspan="2">**Exercice 2.**</td>
<td>**1.**</td>
<td>
Soient $A$ et $B$ les points d'affixe $z_A = 2 - 5i$ et $z_B = 7 - 3i$<br>
**Proposition 1 :** Le triangle $OAB$ est rectangle et isocèle.<br>

<br>
$z_{\overrightarrow{AO}} = z_O - z_A = 0 - (2 - 5i) = -2 + 5i$<br>
$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = 7 - 3i - (2 - 5i) = 7 - 3i - 2 + 5i = 5 + 2i$<br>
$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AO}\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$$<br>
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AO} = 5 \times (-2) + 2 \times 5 = -10 + 10 = 0$ donc $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AO}$<br>
De plus, $AB = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$<br>
$AO = \sqrt{5^2 + (-2)^2} = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29} = AB$<br>
**La proposition n°1 est donc vraie.**
</td>
</tr>
<tr>
<td>**2.**</td>
<td>
Soit $z = 3 - i\sqrt{3}$<br>
**Proposition 2 :** Pour tout entier naturel $n$ non nul, $z^{3n}$ est un imaginaire pur.<br>
**❶ Module de $z = 3 - i\sqrt{3}$ :**<br>
$$|z| = |3 - i\sqrt{3}| = \sqrt{3^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{9 + 3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$
</td>
</tr>
</table>

| | | |
|---|---|---|
| | **2.** | **❷ Argument de $z = 3 - i\sqrt{3}$ :** <br> $$z = 3 - i\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\left(\frac{3}{2\sqrt{3}} - i\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right)$$ <br> $$z = 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)i\right)$$ <br> **❸ Argument de $z^{3n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ :** <br> $$\arg(z^{3n}) = 3n \times \arg(z)\ [2\pi]$$ <br> $$\arg(z^{3n}) = 3n \times \left(-\frac{\pi}{6}\right)\ [2\pi]$$ <br> $$\arg(z^{3n}) = -\frac{n\pi}{2}\ [2\pi]$$ <br> **La proposition n°2 est donc fausse car, si $n$ est divisible par 2 alors $z^{3n}$ sera un nombre réel.** <br> **Contre-exemple, pour $n = 2$ :** <br> $$\arg(z^6) = -\pi\ [2\pi] \text{ et } \lvert z^6 \rvert = \lvert z \rvert^6 = \left(2\sqrt{3}\right)^6$$ <br> $$z^6 = \left(2\sqrt{3}\right)^6 (\cos(-\pi) + \sin(-\pi)\,i)$$ <br> $$z^6 = 2^6\left(\sqrt{3}^2\right)^3 (-1 + 0 \times i)$$ <br> $$z^6 = -2^6 \times 3^3 = -1728$$ |
| | **3.** | Soit $z$ un nombre complexe non nul, <br> **Proposition 3 :** Si le module de $z$ est égal à 1 alors $z + \frac{1}{z}$ est un nombre réel. <br> Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$, où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ tel que $\lvert z \rvert = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$ <br> $$z + \frac{1}{z} = x + iy + \frac{1}{x + iy}$$ <br> $$z + \frac{1}{z} = x + iy + \frac{1 \times (x - iy)}{(x + iy)(x - iy)}$$ <br> $$z + \frac{1}{z} = x + iy + \frac{x - iy}{x^2 - i^2y^2}$$ <br> $$z + \frac{1}{z} = x + iy + \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$$ <br> $$z + \frac{1}{z} = x + iy + \frac{x - iy}{1} = x + iy + x - iy = 2x \in \mathbb{R}$$ <br> **La proposition n°3 est donc vraie.** |
| | **4.** | **Proposition 4 :** L'équation $z^5 + z - i + 1 = 0$ admet une solution réelle. <br> Soit $z = x \in \mathbb{R}$, alors $z^5 = x^5 \in \mathbb{R}$ et donc $z^5 + z + 1 \in \mathbb{R}$ <br> or $z^5 + z + 1 = i$ <br> **La proposition n°4 est donc fausse.** |