Mercredi 5 avril 2023
Maths Expertes ➡ Contrôle n° 5

Table des matières

Enoncé du sujet

Exercice 1. (5 points)

Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 1 & 1 & 2-x \end{pmatrix} \text{ où } x \in \mathbb{R}$$

▶ 1. Pour tout réel x, calculer M^2.

▶ 2a) Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de x, on a $M^2 = 2M + 5I_3$.

b) Pour les valeurs de x précédentes, en déduire que la matrice M est inversible et préciser sa matrice inverse.

Exercice 2. (5 points)

▶ 1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$.

a) La matrice A est-elle inversible ? Justifier votre réponse.

b) Donner l'inverse de la matrice A.

▶ 2. ***A la manière de Diophante !***

On souhaite trouver 2 nombres entiers dont le premier avec la moitié du second ou bien le second avec le tiers du premier forment toujours la somme de 5.

a) Traduire les données de l'énoncé par un système d'équations.

b) Ecrire le système sous la forme $A \times X = B$ où les matrices B et X sont à préciser.

c) En déduire les deux nombres cherchés.

Exercice 3. (10 points)

On considère la suite (u_n) définie par :

$u_0 = 1$, $u_1 = 6$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+2} = 6u_{n+1} - 8u_n$$

▶ 1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}$ et, pour tout entier naturel n, la matrice colonne $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = A\,U_n$.

▶ 2. On considère les matrices $B = \begin{pmatrix} 2 & -0{,}5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -1 & 0{,}5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $A^n = 2^n B + 4^n C$.

b) On admet que, pour tout entier naturel n, $U_n = A^n U_0$.

Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = 2 \times 4^n - 2^n$.

⬆

CORRECTION du contrôle n° $\boxed{5}$
Correction du Sujet

Exercice 1. (5 points)

Soit la matrice
$$M=\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 1 & 1 & 2-x \end{pmatrix} \text{ où } x\in\mathbb{R}$$

▶ 1. Pour tout réel x, calculer M^2.

▶ 2a) Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de x, on a $M^2=2M+5I_3$.

b) Pour les valeurs de x précédentes, en déduire que la matrice M est inversible et préciser sa matrice inverse.

Exercice 1.	**1.**	$\forall x\in\mathbb{R},\quad M^2=\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 1 & 1 & 2-x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 1 & 1 & 2-x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x^2 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & 0 \\ 2 & 2 & (2-x)^2 \end{pmatrix}$
	2a	$2M+5I_3=2\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 1 & 1 & 2-x \end{pmatrix}+5\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x+5 & 0 & 0 \\ 0 & 2x+5 & 0 \\ 0 & 0 & 2(2-x)+5 \end{pmatrix}$ $=\begin{pmatrix} 2x+5 & 0 & 0 \\ 0 & 2x+5 & 0 \\ 0 & 0 & 9-2x \end{pmatrix}$ $M^2=2M+5I_3$ $\Leftrightarrow\begin{pmatrix} x^2 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & 0 \\ 2 & 2 & (2-x)^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x+5 & 0 & 0 \\ 0 & 2x+5 & 0 \\ 0 & 0 & 9-2x \end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow\begin{cases} x^2=2x+5 \\ x^2=2x+5 \\ (2-x)^2=9-2x \end{cases}$ $\Leftrightarrow\begin{cases} x^2=2x+5 \\ 4-4x+x^2=9-2x \end{cases}$ $\Leftrightarrow x^2-2x-5=0$ $\Delta=4-4\times1\times(-5)=24>0$ $\boldsymbol{x_1}=\dfrac{2-\sqrt{24}}{2}=\dfrac{2-2\sqrt{6}}{2}=\mathbf{1-\sqrt{6}}$ $\boldsymbol{x_2}=\mathbf{1+\sqrt{6}}$
	2b	Pour $x\in\{1-\sqrt{6};1+\sqrt{6}\}$, $M^2-2M=5I_3$ $\underbrace{\frac{1}{5}(M-2I_3)}_{M^{-1}}\times M=I_3$ **On en déduit que M est inversible et $M^{-1}=\dfrac{1}{5}(M-2I_3)$**

Exercice 2. (5 points)

▶1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$.

a) La matrice A est-elle inversible ? Justifier votre réponse.

b) Donner l'inverse de la matrice A.

▶2. ***A la manière de Diophante !***

On souhaite trouver 2 nombres entiers dont le premier avec la moitié du second ou bien le second avec le tiers du premier forment toujours la somme de 5.

a) Traduire les données de l'énoncé par un système d'équations.

b) Ecrire le système sous la forme $A \times X = B$ où les matrices B et X sont à préciser.

c) En déduire les deux nombres cherchés.

Exercice 2.	**1a.**	$$\det(A) = 1 \times 1 - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \neq 0$$ J'en déduis que la matrice A est inversible.
	1b.	$$A^{-1} = \frac{1}{\frac{5}{6}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{3} & 1 \end{pmatrix} = \frac{6}{5} \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{3} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} & \frac{-3}{5} \\ \frac{-2}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix}$$
	2a.	Appelons x et y les deux nombres entiers recherchés. Le premier avec la moitié du second donne 65 donc $x + \frac{1}{2}y = 5$ Le second avec le tiers du premier donne 65 donc $y + \frac{1}{3}x = 5$ $$\begin{cases} x + \frac{1}{2}y = 5 \\ \frac{1}{3}x + y = 5 \end{cases}$$
	2b.	En posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ et avec $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$ on a alors $A \times X = B$
	2c.	$$AX = B$$ $$A^{-1} \times AX = X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} & \frac{-3}{5} \\ \frac{-2}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$ **Les deux nombres cherchés sont, dans l'ordre, 3 et 4.**

Exercice 3. (10 points)

On considère la suite (u_n) définie par :

$u_0 = 1$, $u_1 = 6$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+2} = 6u_{n+1} - 8u_n$$

▶1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}$ et, pour tout entier naturel n, la matrice colonne $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = A\,U_n$.

▶2. On considère les matrices $B = \begin{pmatrix} 2 & -0{,}5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -1 & 0{,}5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $A^n = 2^n B + 4^n C$.

b) On admet que, pour tout entier naturel n, $U_n = A^n U_0$.

Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = 2 \times 4^n - 2^n$.

Exercice 3.	**1.**	$\forall n \in \mathbb{N}$, $A\,U_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ -8u_n + 6u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = U_{n+1}$
	2a.	$\forall n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}(n)$ la proposition $A^n = 2^n B + 4^n C$ Initialisation : pour $n = 0$ $A^0 = I_2$ $2^0 \times B + 4^0 \times C = B + C = \begin{pmatrix} 2 & -0{,}5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0{,}5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 = A^0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est donc vraie. Hérédité : Je suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un entier naturel n $A^{n+1} = A^n \times A$ $A^{n+1} = (2^n B + 4^n C) \times A$ $A^{n+1} = 2^n B \times A + 4^n C \times A$ $A^{n+1} = 2^n \begin{pmatrix} 2 & -0{,}5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -8 & 6 \end{pmatrix} + 4^n \begin{pmatrix} -1 & 0{,}5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}$ $A^{n+1} = 2^n \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 8 & -2 \end{pmatrix} + 4^n \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -16 & 8 \end{pmatrix}$ $A^{n+1} = 2^n \times 2 \times B + 4^n \times 4 \times C$ $A^{n+1} = 2^{n+1} B + 4^{n+1} C$ donc $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie. J'en déduis que **$\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n**

	2b.	$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = 2^n B + 4^n C$ $A^n = 2^n \begin{pmatrix} 2 & -0{,}5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} + 4^n \begin{pmatrix} -1 & 0{,}5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ $U_n = A^n U_0 = (2^n B + 4^n C)U_0$ $U_n = 2^n B U_0 + 4^n C U_0$ $U_n = 2^n \begin{pmatrix} 2 & -0{,}5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} + 4^n \begin{pmatrix} -1 & 0{,}5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ $U_n = 2^n \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} + 4^n \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$ $U_n = \begin{pmatrix} -2^n + 2 \times 4^n \\ -2 \times 2^n + 8 \times 4^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 4^n - 2^n \\ 2 \times 4^{n+1} - 2^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$ **J'en déduis que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 \times 4^n - 2^n$**