Mercredi 24 mai 2023
Maths Expertes ➡ Contrôle n° 6

Table des matières

Exercice 1. (10 points)

Partie A.

On considère l'équation (E) $11x - 26y = 1$, où x et y désignent deux nombres entiers relatifs.

26	**11**
52	22
78	33
104	44
130	55
156	66
182	77

▶1 a) Justifier l'existence d'une solution particulière de l'équation (E).

b) Soit $(x_0; y_0)$ une solution particulière de l'équation (E). Démontrer que si $(x; y)$ est solution de l'équation (E) alors $11(x - x_0) = 26(y - y_0)$

c) Déterminer un couple solution de l'équation (E).

▶2 a) Déterminer toutes les solutions de l'équation (E).

b) En déduire le couple $(u; v)$ d'entiers relatifs solution de l'équation (E) tels que $0 \leq u \leq 25$.

Partie B.

Chaque lettre de l'alphabet est associée à un nombre entier comme indiqué dans le tableau :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Soit x le nombre associé à la lettre à coder. On détermine le reste y de la division euclidienne de $11x + 8$ par 26, puis on en déduit la lettre associée à y (c'est elle qui code la lettre d'origine).

Exemple : L correspond à $x = 11$ or, $11^2 + 8 = 129 \equiv 25\ [26]$ donc la lettre L est codée par la lettre Z.

▶1. Coder la lettre W.

▶2. Démontrer que $y \equiv 11x + 8\ [26]$ si, et seulement si, $x \equiv 19y + 4\ [26]$

▶3. À l'aide de la question précédente décoder l'acronyme PY.

Exercice 2. (10 points)

Dans tout l'exercice x et y désignent des entiers naturels non nuls vérifiant $x < y$.

$\mathcal{S}$ est l'ensemble des couples (x, y) tels que $PGCD(x, y) = y - x$.

▶1. Le couple $(363,484)$ appartient-il à $\mathcal{S}$? Justifier.

▶2 a) Soit n un entier naturel non nul, le couple $(n, n + 1)$ appartient-il à $\mathcal{S}$? Justifier.

b) Soit n un entier naturel non nul, le couple $(n, 2n)$ appartient-il à $\mathcal{S}$? Justifier.

▶3 a) Soit p un nombre premier, combien existe-t-il d'entiers y tel que le couple (p, y) appartient à $\mathcal{S}$? Justifier.

b) Est-il possible de trouver un entier naturel x tel que le nombre de couple (x, y) qui appartiennent à $\mathcal{S}$ soit exactement de 6 ? Si oui, en donner un exemple.

▶4 a) Démontrer que (x, y) appartient à $\mathcal{S}$ si, et seulement si, il existe un entier naturel k non nul tel que $x = k(y - x)$ et $y = (k + 1)(y - x)$.

b) En déduire que pour tout couple (x, y) de $\mathcal{S}$ on a : $PPCM(x, y) = k(k + 1)(y - x)$

▶5 a) Décomposer 228 en facteurs premiers.

b) En déduire l'ensemble des couples (x, y) de $\mathcal{S}$ tels que $PPCM(x, y) = 228$.

▶6. *Question subsidiaire :*

Créer un programme python qui place, dans un repère, un pixel correspondant aux coordonnées (x, y) mais seulement pour les couples (x, y) qui appartiennent à $\mathcal{S}$.

CORRECTION du contrôle n° 6
Correction du Sujet

Correction de l'exercice 1. (10 points)

Partie A.

On considère l'équation (E) $11x - 26y = 1$, où x et y désignent deux nombres entiers relatifs.

▶1 a) Justifier l'existence d'une solution particulière de l'équation (E).

b) Soit $(x_0; y_0)$ une solution particulière de l'équation (E). Démontrer que si $(x; y)$ est solution de l'équation (E) alors $11(x - x_0) = 26(y - y_0)$

c) Déterminer un couple solution de l'équation (E).

▶2 a) Déterminer toutes les solutions de l'équation (E).

b) En déduire le couple $(u; v)$ d'entiers relatifs solution de l'équation (E) tels que $0 \leq u \leq 25$.

26	11
52	22
78	33
104	44
130	55
156	66
182	77

Exercice 1. Partie A.

1a. $PGCD(11; 26) = 1$, d'après le théorème de Bézout, il existe un couple $(u; v)$ tels que $11u + 26v = 1$. Le couple $(u; -v)$ est donc solution de l'équation (E).

1b. $(x_0; y_0)$ est solution de l'équation (E) donc $11x_0 - 26y_0 = 1$

Si $(x; y)$ est solution de l'équation (E) alors

$$11x - 26y = 1$$

$$\text{et donc } 11x - 26y - (11x_0 - 26y_0) = 1 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 11x - 26y - 11x_0 + 26y_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow 11x - 11x_0 = 26y - 26y_0$$

$$\Leftrightarrow 11(x - x_0) = 26(y - y_0)$$

1c.

$$11 \times 7 = 77 \text{ et } 26 \times 3 = 78$$

$$11 \times (-7) - 26 \times (-3) = 1$$

Le couple $(-7; -3)$ est donc solution de l'équation (E).

2a. Si $(x; y)$ est solution de l'équation (E) alors $11(x + 7) = 26(y + 3)$

11 est donc un diviseur de $26(y + 3)$ mais puisque, $PGCD(11\,;26) = 1$, 11 est un diviseur de $y + 3$.

$$\text{donc } y + 3 = 11k \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{soit } y = 11k - 3 \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{or } 11x - 26y = 1$$

$$\text{or } 11x = 1 + 26(11k - 3)$$

$$\Leftrightarrow 11x = 1 + 286k - 78$$

$$\Leftrightarrow 11x = 286k - 77$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{286k - 77}{11} = \frac{286k}{11} - \frac{77}{11} = 26k - 7$$

Les solutions de l'équation (E) sont les couples $(26k - 7; 11k - 3)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$

	2b.	$$0 \leq 26k - 7 \leq 25$$ $$\Leftrightarrow 7 \leq 26k \leq 32$$ $$\Leftrightarrow \frac{7}{26} \leq k \leq \frac{32}{26}$$ La seule possibilité est donc que $k = 1$, soit le couple solution $$\boldsymbol{u = 26 \times 1 - 7 = 19 \text{ et } v = 11 \times 1 - 3 = 8}$$

Partie B.
Chaque lettre de l'alphabet est associée à un nombre entier comme indiqué dans le tableau :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Soit x le nombre associé à la lettre à coder. On détermine le reste y de la division euclidienne de $11x + 8$ par 26, puis on en déduit la lettre associée à y (c'est elle qui code la lettre d'origine).
Exemple : L correspond à $x = 11$ or, $11^2 + 8 = 129 \equiv 25\ [26]$ donc la lettre L est codée par la lettre Z.
► 1. Coder la lettre W.
► 2. Démontrer que $y \equiv 11x + 8\ [26]$ si, et seulement si, $x \equiv 19y + 4\ [26]$
► 3. À l'aide de la question précédente décoder l'acronyme PY.

Exercice 1. Partie B.	**1.**	La lettre W correspond à $x = 22$. $y = 11 \times 22 + 8 = 250 \equiv 16\ [26]$ La lettre W est codée par la lettre Q.	
	2.	**Condition nécessaire :** Démontrons que : « $y \equiv 11x + 8\ [26] \Longrightarrow x \equiv 19y + 4\ [26]$ » $$y \equiv 11x + 8\ [26]$$ $$\Longrightarrow 19y \equiv 209x + 152\ [26]$$ $$\Longrightarrow 19y \equiv x + 22\ [26]$$ $$\Longrightarrow 19y - 22 \equiv x\ [26]$$ $$\Longrightarrow 19y + 4 \equiv x\ [26]$$ **Réciproquement, condition suffisante :** Démontrons que « $x \equiv 19y + 4\ [26] \Longrightarrow y \equiv 11x + 8\ [26]$ » $$x \equiv 19y + 4\ [26]$$ $$\Longrightarrow 11x \equiv 209y + 44\ [26]$$ $$\Longrightarrow 11x \equiv y + 18\ [26]$$ $$\Longrightarrow 11x - 18 \equiv y\ [26]$$ $$\Longrightarrow 11x + 8 \equiv y\ [26]$$	
	3.	La lettre P correspond à $y = 15$. $x = 19 \times 15 + 4 = 289 \equiv 3\ [26]$ La lettre P est décodée par la lettre D.	La lettre Y correspond à $y = 24$. $x = 19 \times 24 + 4 = 460 \equiv 18\ [26]$ La lettre Y est décodée par la lettre S.

Correction de l'exercice 2. (10 points)

Dans tout l'exercice x et y désignent des entiers naturels non nuls vérifiant $x < y$.

$\mathcal{S}$ est l'ensemble des couples (x, y) tels que $PGCD(x, y) = y - x$.

▶1. Le couple (363,484) appartient-il à $\mathcal{S}$? Justifier.

▶2 a) Soit n un entier naturel non nul, le couple $(n, n + 1)$ appartient-il à $\mathcal{S}$? Justifier.

b) Soit n un entier naturel non nul, le couple $(n, 2n)$ appartient-il à $\mathcal{S}$? Justifier.

▶3 a) Soit p un nombre premier, combien existe-t-il d'entiers y tel que le couple (p, y) appartient à $\mathcal{S}$? Justifier.

b) Est-il possible de trouver un entier naturel x tel que le nombre de couple (x, y) qui appartiennent à $\mathcal{S}$ soit exactement de 6 ? Si oui, en donner un exemple.

▶4 a) Démontrer que (x, y) appartient à $\mathcal{S}$ si, et seulement si, il existe un entier naturel k non nul tel que $x = k(y - x)$ et $y = (k + 1)(y - x)$.

b) En déduire que pour tout couple (x, y) de $\mathcal{S}$ on a : $PPCM(x, y) = k(k + 1)(y - x)$

▶5 a) Décomposer 228 en facteurs premiers.

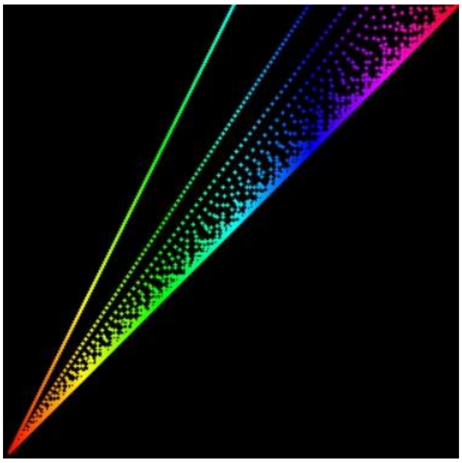
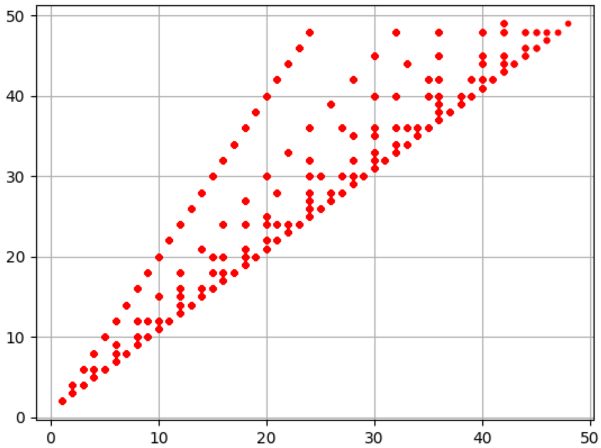
b) En déduire l'ensemble des couples (x, y) de $\mathcal{S}$ tels que $PPCM(x, y) = 228$.

▶6. *Question subsidiaire :*

Créer un programme python qui place, dans un repère, un pixel correspondant aux coordonnées (x, y) mais seulement pour les couples (x, y) qui appartiennent à $\mathcal{S}$.

Exercice 2.	**1.**	$PGCD(363{,}484) = 121$ or $484 - 363 = 121$ donc le couple (363,484) appartient à $\mathcal{S}$.
	2a.	Soit n un entier naturel non nul, soit d un diviseur commun à n et $n + 1$ alors d divise $n + 1 - n = 1$. J'en déduis que 1 est le plus grand des diviseurs communs de n et $n + 1$ or $n + 1 - n = 1 = PGCD(n, n + 1)$ donc le couple $(n, n + 1)$ appartient à $\mathcal{S}$.
	2b.	Soit n un entier naturel non nul, n divise $2n$ J'en déduis que n est le plus grand des diviseurs communs de n et $2n$ or $2n - n = n = PGCD(n, 2n)$ donc le couple $(n, 2n)$ appartient à $\mathcal{S}$.
	3a.	Soit p un nombre premier et soit y un entier tel que le couple (p, y) appartienne à $\mathcal{S}$ alors $PGCD(p, y) = y - p$ or le $PGCD(p, y)$ divise le nombre p qui est premier. Il y a alors seulement deux cas possibles : $y - p = 1 \iff y = p + 1$; $y - p = p \iff y = 2p$ Si p un nombre premier, alors il existe exactement 2entiers y tel que le couple (p, y) appartienne à $\mathcal{S}$.

	3b.	Soit p un nombre premier et soit y un entier tel que le couple (p^5, y) appartienne à $\mathcal{S}$ alors $PGCD(p^5, y) = y - p^5$ or le $PGCD(p^5, y)$ divise le nombre p^5. L'ensemble des diviseurs de p^5 est $\mathcal{D}(p^5) = \{1; p; p^2; p^3; p^4; p^5\}$ L'ensemble des y tels que le couple (p^5, y) appartienne à $\mathcal{S}$ est donc : $$\{p^5 + 1; p^5 + p; p^5 + p^2; p^5 + p^3; p^5 + p^4; p^5 + p^5\}$$
	4a.	Condition nécessaire : Je suppose que (x, y) appartient à $\mathcal{S}$ alors $PGCD(x, y) = y - x$ or le $PGCD(x, y)$ divise le nombre x. donc, il existe un entier naturel k non nul tel que $x = k(y - x)$ de plus, $y = y - x + x$ $$y = (y - x) + k(y - x)$$ donc $y = (k + 1)(y - x)$ Réciproquement, condition suffisante : Je suppose qu'il existe un entier naturel k non nul tel que $x = k(y - x)$ et $y = (k + 1)(y - x)$ puisque $PGCD(k, k + 1) = 1$ alors $PGCD(x, y) = y - x$ donc $(x, y) \in \mathcal{S}$
	4b.	Pour tout couple (x, y) de $\mathcal{S}$, $x = k(y - x)$ et $y = (k + 1)(y - x)$ où $k \in \mathbb{Z}^*$ $(y - x)$ est un facteur commun à x et y et $PGCD(k, k + 1) = 1$ donc $PPCM(x, y) = k(k + 1)(y - x)$
	5a.	$$228 = 2^2 \times 3 \times 19$$
	5b.	Nous recherchons $k\ et$ k+1 deux entiers consécutifs $PCM(x, y) = 228 = 1 \times 2 \times 114$ En posant $k = 1, k + 1 = 2$ et $y - x = 114$. On obtient $x = 1 \times 114 = 114$ et $y = 2 \times 114 = 228$ $PPCM(x, y) = 228 = 2 \times 3 \times (2 \times 19) = 2 \times 3 \times 38$ En posant $k = 2, k + 1 = 3$ et $y - x = 38$ On obtient $x = 2 \times 38 = 76$ et $y = 3 \times 38 = 114$ $PPCM(x, y) = 228 = 3 \times 4 \times 19$ En posant $k = 3, k + 1 = 4$ et $y - x = 19$ On obtient $x = 3 \times 19 = 57$ et $y = 4 \times 19 = 76$

	6.	  **... avec Turtle** **... avec Matplotlib**