Comment résoudre des équations du 3e degré ?

Activité n°1 : lorsqu'il y a une solution particulière …

Résoudre chacune des deux équations (E_1) et (E_2) en recherchant une solution particulière simple :

$$(E_1) : \; x^3 - 2x = 1$$
$$(E_2) : \; x^3 - 5x = 2$$

Activité n°2 : la formule de Tartaglia-Cardan

Formule de Tartaglia-Cardan :

Dans le cas général, une équation du type : $x^3 + px + q = 0$ admet une solution de la forme :

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} - \frac{q}{2}} + \sqrt[3]{-\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} - \frac{q}{2}} \qquad \text{si, bien sûr, le nombre } \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \geq 0.$$

▶1. Soit $(E_3) : \; x^3 + 6x = 20$, à l'aide de la formule de Cardan déterminer une solution. Cette solution vous semblera très compliquée. Vous pourrez l'écrire plus simplement en vous aidant du développement de $\left(1+\sqrt{3}\right)^3$ et $\left(1-\sqrt{3}\right)^3$. Nous avons ainsi une solution. Achever alors la résolution.

▶2. Soit $(E_4) : \; x^3 = 32x + 24$, vérifier que $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$, la formule de Tartaglia-Cardan ne peut s'appliquer. Vérifier cependant que 6 est racine et achever la résolution.

Activité n°3 : Raphaël Bombelli

Soit $(E_5) : x^3 = 15x + 4$.

a) Vérifier que la solution donnée par les formules de Tartaglia Cardan devrait s'écrire :

$$x = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}}$$

b) Calculer $(a+b)^3$ et $(a-b)^3$ en remplaçant a par 2 et b par $\sqrt{-1}$, où $\sqrt{-1}$ désigne quelque chose dont le carré est -1. ***Quelle est la solution trouvée par Bombelli ?***

Activité n°4 : Leonhard Euler

Avec la notation de Bombelli, que vaut $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1}$. ***Est-ce compatible ?***

Activité n°5 : Nombre imaginaire

En utilisant le symbole i, écrire les nombres dont le carré est -25; dont le carré est -8 et qui vérifie $300 + (z+2)^2 = 55$.

Exercices :

Exercice n°1 : Résoudre chacune des deux équations (E_1) et (E_2) en recherchant d'abord une solution particulière simple $\quad (E_1) : \; x^3 - x^2 - x = 2 \qquad (E_2) : \; 4x^3 + 8x^2 + 5x + 1 = 0$

Exercice n°2 : Développer et réduire : $(a+b)^3$ puis $(a-b)^3$. En déduire $\left(2+\sqrt{3}\right)^3$ puis $\left(3-5\sqrt{2}\right)^3$.

Exercice n°3 : En utilisant i, déterminer les nombres z qui vérifient les équations :

$$z^2 = -64 \qquad\qquad 10 - z^2 = 85$$

$$500 + 2(z+1)^2 = 162 \qquad\qquad \frac{(2z-4)^2}{8} - 10 = -28$$

D'après Anne Boyé, Régionale APMEP de Nantes, IREM des Pays de la Loire