Comment Cardan a-t-il établi sa formule ?

Activité n°1 : Somme et Produit de racines

▶**1.** Déterminer les dimensions d'un rectangle de périmètre 160 cm et d'aire 15,96 dm².

▶**2.** Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré ($a \neq 0$) admettant deux racines notées x_1 et x_2.
Démontrez que x_1 et x_2 sont racines du polynôme f si, et seulement si,

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Activité n°2 : Polynômes de Cardan

▶**1.** Quelle est la forme la plus générale d'un polynôme de degré 3 ?

▶**2.** En utilisant le changement de variable $x = z - \frac{b}{3a}$, démontrez que tout polynôme de degré 3 peut s'écrire sous la forme $z^3 + pz + q = 0$ où l'on précisera les expressions de p et de q.

APPROFONDIR — Activité n°3 : Démonstration de la formule

La **méthode de Cardan***, proposée par Jérôme Cardan dans son ouvrage Ars Magna publié en 1545, permet de prouver que les équations polynomiales de degré 3 sont résolubles par radicaux.*

Formule de Tartaglia-Cardan :

Dans le cas général, une équation du type : $x^3 + px + q = 0$ admet une solution de la forme :

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} - \frac{q}{2}} + \sqrt[3]{-\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} - \frac{q}{2}}$$

si, bien sûr, le nombre $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \geq 0$.

Soit l'équation $x^3 + px + q = 0$, Cardan a cherché une solution sous la forme $x = a + b$ où a et b deviennent deux inconnues à déterminer.

▶**1.** Démontrez que l'on a alors $a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = -q - p(a + b)$.

▶**2.** *Par une sorte d'identification,* Cardan cherche alors à trouver a et b tels que

$$\begin{cases} a^3 + b^3 = -q \\ 3ab = -p \end{cases}. \text{ En déduire que } \begin{cases} a^3 + b^3 = -q \\ a^3 b^3 = -\frac{p^3}{27} \end{cases}.$$

▶**3.** Déterminez alors a^3 et b^3. En déduire a, b et enfin retrouvez la solution de Cardan.