

## Chap 2. Arithmétique ou l'étude de la divisibilité Maths Expertes

### Euclide (vers 300 avant notre ère.)



Mathématicien de la Grèce antique. Son ouvrage le plus célèbre, les Éléments, est un des plus anciens traités connus présentant de manière systématique, à partir d'axiomes, un large ensemble de théorèmes accompagnés de leurs démonstrations. Il porte sur la géométrie, tant plane que solide, et l'arithmétique théorique.

## Chap 2. Arithmétique ou l'étude de la divisibilité

### Maths Expertes

#### I. Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

Soit  $a$ ,  $b$  et  $c$  trois nombres entiers relatifs non nuls.

#### Définition

On dit que  **$b$  divise  $a$**  lorsque :

On dit alors que  $b$  est un **diviseur** de  $a$  (et on note  $b|a$ )  
ou que  $a$  est un **multiple** de  $b$ .

### Propriété

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , tout diviseur positif de  $n$  est compris entre 1 et  $n$ , par conséquent, tout entier naturel non nul possède **un nombre fini de diviseurs**.

### Remarques

- On notera  $\mathcal{D}(n)$  l'ensemble des diviseurs dans  $\mathbb{N}$  de l'entier naturel  $n$ .
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 \in \mathcal{D}(n)$  et  $n \in \mathcal{D}(n)$

### Propriété

Si  $a$  divise  $b$  et  $b$  divise  $c$  alors  $a$  divise  $c$ .

### Démonstration

### Théorème

Si  $a$  divise  $b$  et  $a$  divise  $c$  alors  $a$  divise  $\alpha b + \beta c$  où  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$

### Démonstration

### Corollaire

Si  $a$  divise  $b$  et  $a$  divise  $c$  alors  $a$  divise  $b + c$  et  $a$  divise  $b - c$ .

### Démonstration

## Chap 2. Arithmétique ou l'étude de la divisibilité

### Maths Expertes

#### Exemple 1.

- ▶ 1. a) 3764559182 est-il divisible par 10 ? par 2 ? par 3 ?  
b) Par quels nombres 2467381905 est-il divisible ?
- ▶ 2. Quels sont tous les diviseurs de 12 ? Quels sont les diviseurs de 1 ? Quels sont les diviseurs de  $-36$  ?
- ▶ 3. Quels sont les diviseurs communs à 8633 et 194 ?
- ▶ 4. Déterminer tous les entiers naturels  $n$  tels que  $n + 3$  divise  $5n - 4$ .

#### Exemple 2.

- a) Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de 371 par 31.
- b) Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de  $-547$  par 12.

#### Rappel : division euclidienne dans $\mathbb{N}$

Si  $a \in \mathbb{N}$  et  $b \in \mathbb{N}^*$  alors il existe un unique couple d'entiers naturels  $(q, r)$  tels que  $a = bq + r$  où  $0 \leq r < b$ .

#### Théorème : division euclidienne dans $\mathbb{Z}$

Si  $a \in \mathbb{Z}$  et  $b \in \mathbb{Z}^*$  alors il existe un unique couple d'entiers  $(q, r)$  tels que  $a = bq + r$  où  $0 \leq r < |b|$  et  $q \in \mathbb{Z}$ .

### Corollaire

$a$  divise  $b$  si, et seulement si, le reste de la division euclidienne de  $a$  par  $b$  est égal à 0.

### Exemple 3.

► 1. Deux nombres entiers ont 508 de différence. De plus, la division euclidienne de l'un par l'autre a pour quotient 18 et pour reste 15. **Quels sont ces deux nombres ?**

► 2a) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , développer  $(n - 2)(n + 5) + 2$ .

b) Peut-on en déduire le quotient et le reste de la division euclidienne de  $n^2 + 3n - 8$  par  $n + 5$  ?

c) Peut-on en déduire le quotient et le reste de la division euclidienne de  $n^2 + 3n - 8$  par  $n - 2$  ?

## II. Congruence

$a$  et  $b$  désignent deux entiers relatifs.

### Définition

Soit  $n \in \mathbb{N}$ , on dit que  $a$  et  $b$  sont **congrus modulo  $n$**  lorsque  **$n$  divise  $b - a$** .

On note alors  **$a \equiv b [n]$**

### Exemples

$$29 \equiv \dots [7]$$

$$29 \equiv \dots [3]$$

$$29 \equiv \dots [3]$$

$$32 \equiv \dots [5]$$

$$44 \equiv \dots [2]$$

$$25 \equiv 1 [\dots]$$



### Théorème

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$

$a \equiv b [n]$  si, et seulement si,  $a$  et  $b$  ont le même reste dans la division euclidienne par  $n$ .

Démonstration :

### Corollaire

Soit  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

Il existe un unique entier  $r$  tel que  $0 \leq r < n$  et  $a \equiv r [n]$ .

Cet entier  $r$  est le reste dans la division euclidienne de  $a$  par  $n$ .

### Propriétés

Soit  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ ,  $a, b$  et  $c$  des entiers relatifs,

1)  $a \equiv a [n]$

2) Si  $a \equiv b [n]$  et  $b \equiv c [n]$  alors  $a \equiv c [n]$

### Démonstration

### Propriétés

Soit  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ ,  $a, b, c$  et  $d$  des entiers relatifs,

1) Si  $a \equiv b [n]$  et  $c \equiv d [n]$  alors  $a + c \equiv b + d [n]$

2) Si  $a \equiv b [n]$  et  $c \equiv d [n]$  alors  $a \times c \equiv b \times d [n]$

3) Si  $a \equiv b [n]$  alors  $a^p \equiv b^p [n]$  pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$

### Démonstration

## Chap 2. Arithmétique ou l'étude de la divisibilité

### Maths Expertes

### Propriétés

Soit  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ ,  $a$  un entier relatif,

$a \equiv 0 [n]$  si, et seulement si,  $n$  divise  $a$

### Exemple :

Démontrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le nombre  $9^{2n} - 1$  est divisible par 10.

### Critère de divisibilité :

Soit  $d \in \mathbb{N}$ ,  $a_0, a_1, \dots, a_n$  les chiffres de l'écriture décimale de  $d$

$$d = a_0 + a_1 \times 10 + a_2 \times 10^2 + \dots + a_n \times 10^n = \overline{a_n \dots a_3 a_1 a_0}$$

Retrouver les critères de divisibilités par 2, 5, 3, 9, 4 et 11.