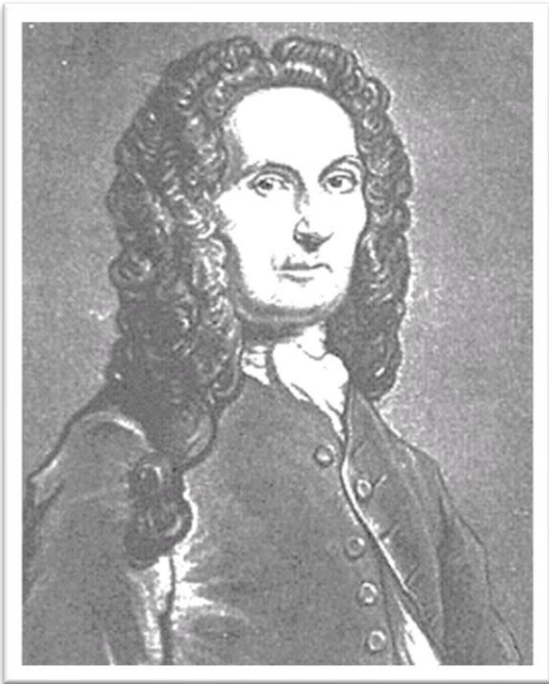


Chap 3. Vers un autre système de coordonnées ... Maths Expertes

Abraham de Moivre (1667-1754)



Mathématicien surtout connu pour l'introduction des quantités imaginaires dans le calcul trigonométrique. Il s'intéressa également au calcul des probabilités : il énonça la règle des probabilités composées et un théorème « limite », montrant que la loi normale est une bonne approximation de la loi binomiale ; il étudia la théorie des séries récurrentes et employa la méthode des équations aux différences finies.

I. Equation du second degré dans $\mathbb{C}$

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$,

Théorème : L'équation $az^2 + bz + c = 0$, de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ admet dans $\mathbb{C}$:

- si $\Delta = 0$, une unique solution $z = \frac{-b}{2a}$

- si $\Delta \neq 0$, deux solutions

- réelles si $\Delta > 0$, $z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

- complexes conjuguées si $\Delta < 0$, $z_1 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$

Chap 3. Vers un autre système de coordonnées ... Maths Expertes

Exemple 1.

Après avoir cherché une racine sous forme imaginaire pur, factoriser, dans $\mathbb{C}$, au maximum le polynôme

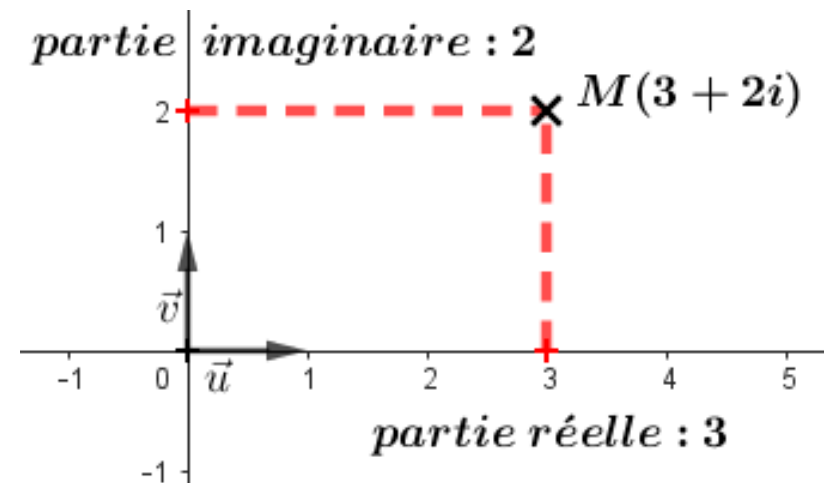
$$P(z) = z^4 - 6z^3 + 39z^2 - 150z + 350$$

II. Le plan complexe

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

Définition : Affixe d'un point

- A tout nombre complexe $z = x + iy$, on associe le point M de coordonnées $(x ; y)$ appelé **image** de z ;
- A tout point M de coordonnées $(x ; y)$ est associé le nombre complexe $z = x + iy$ appelé **affixe du point** M .

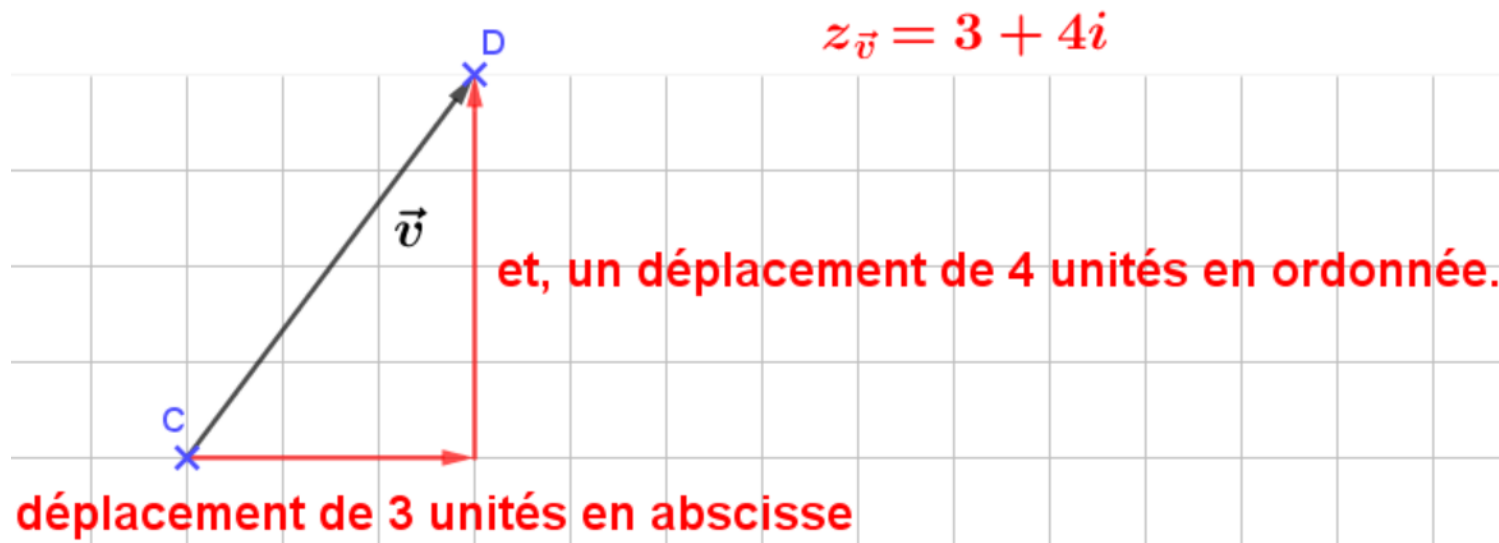


Chap 3. Vers un autre système de coordonnées ... Maths Expertes

Définition : Affixe d'un vecteur

- A tout nombre complexe $z = x + iy$, on associe le vecteur du plan $\vec{v}$ de coordonnées $(x ; y)$;
- A tout vecteur du plan $\vec{v}$ de coordonnées $(x ; y)$, on associe le nombre complexe $z = x + iy$ appelé **affixe du vecteur** $\vec{v}$.

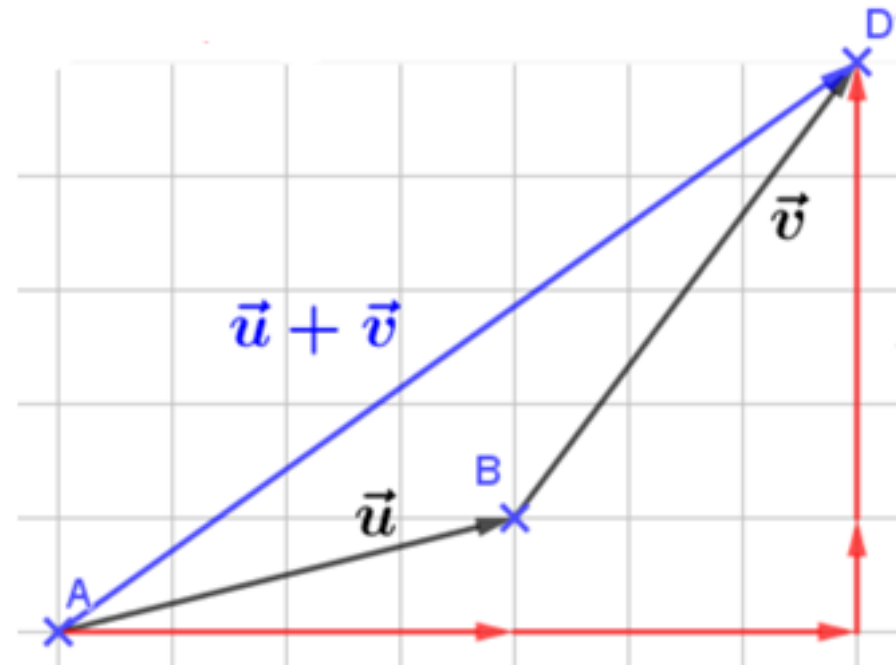
L'affixe du vecteur $\vec{v}$ est alors



Théorème

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'affixe respective $z_{\vec{u}}$ et $z_{\vec{v}}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

- le vecteur somme $\vec{u} + \vec{v}$ a pour affixe $z_{\vec{u}+\vec{v}} = z_{\vec{u}} + z_{\vec{v}}$;
- le vecteur $\lambda\vec{u}$ a pour affixe $z_{\lambda\vec{u}} = \lambda z_{\vec{u}}$.



Théorème

Soit A et B deux points d'affixes respectives z_A et z_B :

- ① le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$;
- ② le milieu I de $[AB]$ a pour affixe $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$.

Exemple 2.

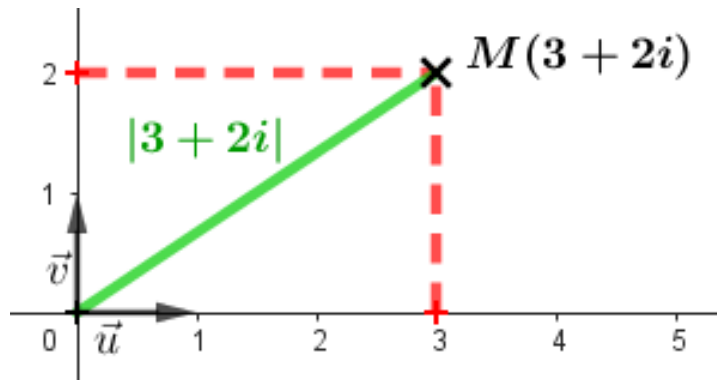
On considère les points A , B , C et D d'affixes respectives :

$$z_A = -1 - 4i, z_B = 4 + i, z_C = 1 + 2i \text{ et } z_D = 2 - 5i.$$

Que peut-on observer ? Démontrez votre conjecture.

III. Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Le plan étant rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$



Définition :

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$,

On appelle **module** de z et on note $|z|$ le réel positif défini par

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

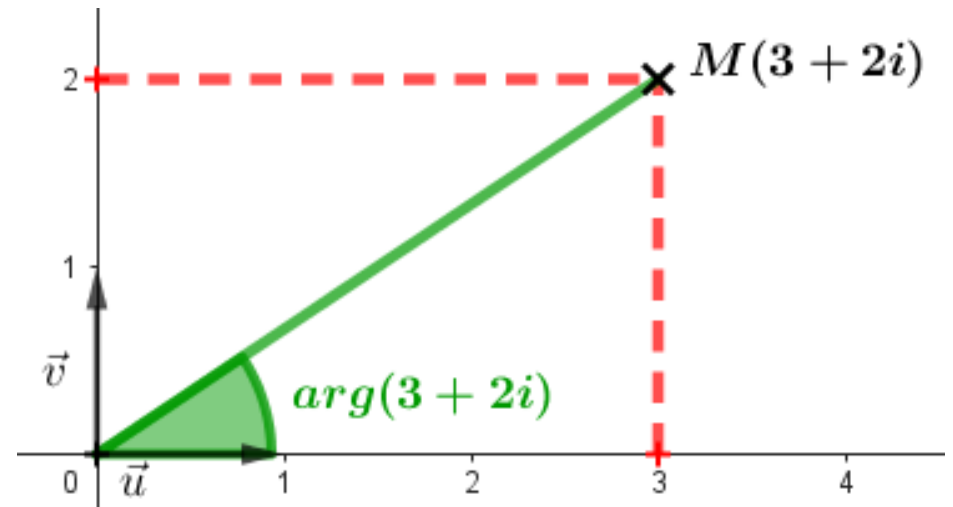
Remarque : Dans le plan complexe, si M est le point d'affixe z alors $|z| = OM$.

Propriété : $\forall z \in \mathbb{C} \quad |z|^2 = z \times \bar{z}$ (démonstration à savoir-faire)

Chap 3. Vers un autre système de coordonnées ... Maths Expertes

Définition :

On appelle **argument** de $z \neq 0$ noté **$\arg(z)$** une mesure en radian de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$.



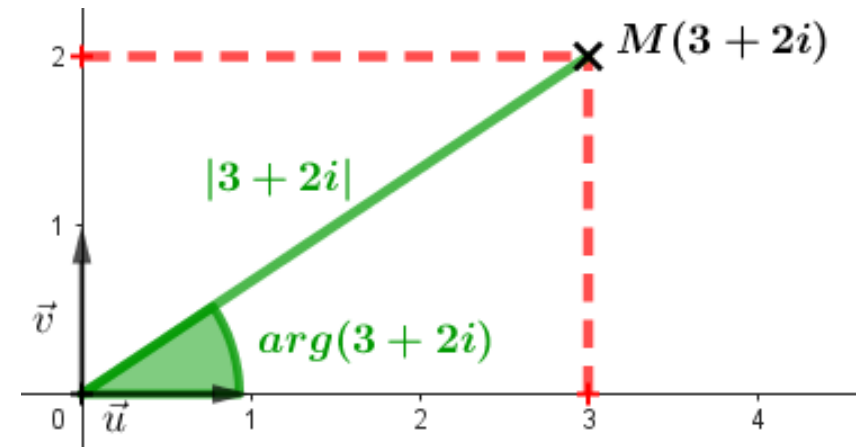
Soit θ un argument de z , les autres arguments de z sont de la forme $\theta + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, donc

$$\arg(z) = \theta [2\pi]$$

Chap 3. Vers un autre système de coordonnées ... Maths Expertes

Définition :

La notation $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$
 où $\arg(z) = \theta [2\pi]$ s'appelle la **forme trigonométrique** du nombre complexe z .



Exemple 3.

- ① Soit le nombre z_2 tel que $|z_2| = 2$ et $\arg(z_2) = -\frac{\pi}{6}$, donner sa forme algébrique.
- ② Soit le nombre $z_1 = -2 + 2i$ donné sous forme algébrique, donner sa forme trigonométrique.

Exemple 4.

Le plan est muni du repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On donne le nombre complexe

$$j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

► 1a) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2 + z + 1 = 0$.

b) En déduire que $j^2 = -1 - j = \bar{j}$ et que $j^3 = 1$.

► 2. Déterminer la forme trigonométrique du nombre complexe j .

► 3. On note P, Q, R les images respectives des nombres complexes $1, j$ et j^2 dans le plan. Quelle est la nature du triangle PQR ? Justifier la réponse.

IV. Produit et quotient de nombres complexes

Propriétés :

Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ et $z' \in \mathbb{C}^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

❶ $|zz'| = |z| \times |z'|$ et $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') [2\pi]$

❷ $|z^n| = |z|^n$ et $\arg(z^n) = n \times \arg(z) [2\pi]$

❸ $\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$ et

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') [2\pi]$$

Exemple 5.

Le nombre complexe $z = (-5\sqrt{3} + 5\sqrt{3}i)^{30200}$ est-il réel ?