Chap 6. Comment utilise-t-on l'exponentielle avec des nombres complexes ?

Maths Expertes

Leonhard Euler (1707 - 1783)

Mathématicien et physicien suisse. Il fit d'importantes découvertes dans le calcul infinitésimal et la théorie des graphes. Il introduisit également une grande partie de la terminologie et de la notation des mathématiques modernes, en particulier pour l'analyse mathématique, comme pour la notion de fonction. La première apparition du nombre e date de 1728, dans un manuscrit d'Euler.

I. La notation exponentielle d'un nombre complexe

Définition :

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \qquad \boldsymbol{\cos\theta + i \times \sin\theta = e^{i\theta}}$$

$e^{i\theta}$ désigne le nombre complexe de module 1 et dont un argument est θ.

$$\boldsymbol{\left|e^{i\theta}\right| = 1 \quad \text{et} \quad \arg\left(e^{i\theta}\right) = \theta\ [2\pi]}$$

Identité d'Euler :

$$\boldsymbol{e^{i\pi} + 1 = 0}$$

Définition :

Une **forme exponentielle** du nombre complexe z est $\boldsymbol{z = |z|e^{i\theta}}$ où θ est un argument de z.

Exemple 1.

▶1. Résoudre l'équation $(E)\quad 4z^2 - 4\sqrt{6}z + 8 = 0$

▶2. On considère les nombres complexes z_1, z_2 solutions de l'équation (E), $z_3 = -\sqrt{2}$ et $z_4 = 2i$. Ecrire chaque nombre sous forme exponentielle.

▶3. En déduire la forme exponentielle de $E = z_1 \times z_2$ et $F = \dfrac{z_3}{z_4}$.

Propriétés : $\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall \theta' \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$

$$e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')} \qquad \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}} \qquad \frac{e^{i\theta'}}{e^{i\theta}} = e^{i(\theta'-\theta)}$$

Formules d'Euler :

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Formule de Moivre :

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

II. Démontrer avec les nombres complexes

Propriété :

Soit A et B deux points d'affixes respectives z_A et z_B :

① $\boldsymbol{AB = \left|z_{\overrightarrow{AB}}\right| = |z_B - z_A|}$;

② Si A et B sont deux points distincts, alors

$$\boldsymbol{\left(\vec{u};\overrightarrow{AB}\right) = \arg\left(z_{\overrightarrow{AB}}\right) = \arg\left(z_B - z_A\right)}$$

Conséquences :

Soit $A(z_A)$, $B(z_B)$, $C(z_C)$ et $D(z_D)$ des points deux à deux distincts :

$$\boldsymbol{\frac{CD}{AB} = \frac{|z_D - z_C|}{|z_B - z_A|} = \left|\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right| \quad \text{et} \quad \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)}$$

Exemple 2.

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_A = 2+3i, \quad z_B = 1+i \text{ et } z_C = 4i$$

- ▶ 1. Calculer $Z = \dfrac{z_A - z_B}{z_A - z_C}$.
- ▶ 2. Donner la forme exponentielle de Z.
- ▶ 3. En déduire la nature du triangle ABC.