Devoir à rédiger n°1
Maths Expertes

Que s'est-il passé dans salle de classe 203 ?

« Nous sommes le 19 octobre 2022, votre professeur de Mathématiques a constaté une intrusion dans la salle P203 ce matin vers 8 heure. Un objet a disparu …

Le bureau fédéral d'investigation vous a dépêché avec votre équipe de détectives sur les lieux du délit … Vous devez suivre les **INDICES** pour trouver qui est l'auteur de cette intrusion, par où iel s'est enfui.e et avec quel objet. »

Qui ?

INDICE : Pour chacune des affirmations suivantes de (P_1) à (P_6), indiquer si elle est vraie ou fausse. Les affirmations vraies doivent être démontrées et, pour les affirmations fausse, un contre-exemple doit être donné.

(P_1) Si $z = 0$ alors $z + \bar{z} = 0$

(P_2) est la réciproque de (P_1)

(P_3) est la contraposée de (P_1)

(P_4) Si $z = i$ alors $z + \dfrac{1}{z} = 0$

(P_5) est la réciproque de (P_4)

(P_6) est la contraposée de (P_4)

Pour chaque affirmation vraie, on note 1 et 0 si elle est fausse. Vous obtenez un nombre binaire qu'il faut convertir en décimal …

Qui ?
3 6 *Mme Expolog*
4 4 *M. Convlimite*
4 5 *M. Perportho*
4 7 *Mme Auhasard*
6 1 *M. Sincostan*
6 3 *Mme Aladériv*
Quoi ?
□ *Un sextant*
□ *Une trousse*
□ *Une équerre*
□ *Des ciseaux*
□ *Des cahiers*
□ *Un compas*
Où ?
□ *Salle 3,14*
□ *Salle informatique*
□ *Salle de géométrie*
□ *Salle fractale*
□ *Salle aléatoire*
□ *Salle spiralée*

Quoi ?

INDICE : Déterminer Z dans chacun des cas suivants en détaillant vos calculs **SANS CALCULATRICE** :

$a)\ Z = 36 + (4+5i)^2 + (4-5i)^2$ $\qquad$ $b)\ Z = \dfrac{3\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}i\right)^6}{-8i}$

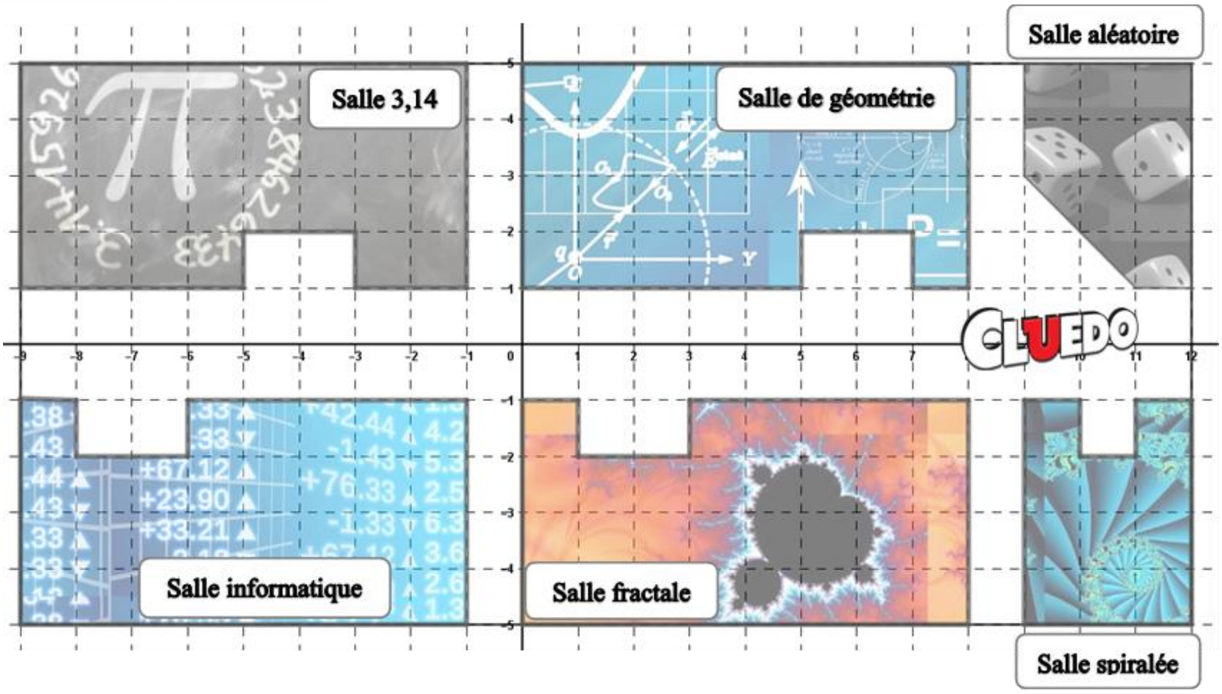
$c)\ Z = \sqrt{-\left(\sqrt{3}+i\right)^6}$ $\qquad$ $d)\ Z = 8 + 3\left(\dfrac{4-3i}{1-2i} + \dfrac{4+3i}{1+2i}\right)$ $\qquad$ $e)\ Z = (1+i)^8$

$f)\ Z = z + \bar{z}$ où z est solution de l'équation $3iz - 5\bar{z} + 16 = 0$

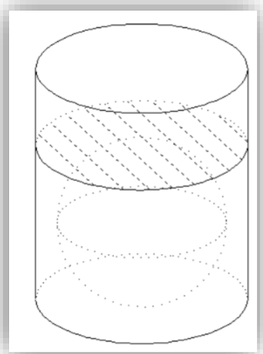
$g)\ Z = z\bar{z}$ où z est solution de l'équation $2z + 10i = 3(\bar{z} - 1)$

Les nombres trouvés vont vous permettre de trouver l'objet avec lequel notre intrus.e est parti.e … sûrement un langage codé …

Où ? Déterminez l'abscisse et l'ordonnée de la position de l'intrus.e lors de sa fuite



INDICE : Dans un vase cylindrique de 10 cm de diamètre intérieur, on dépose une bille parfaitement sphérique de 4 cm de rayon. On verse de l'eau jusqu'à ce que la surface de l'eau soit tangente au sommet de la bille.



▶1. Déterminer la valeur exacte de la quantité d'eau mise dans le vase.

▶2. On remplace la bille par une autre bille de rayon différent en gardant la même quantité d'eau dans le vase. On remarque que la surface de l'eau est encore tangente au sommet de la bille. Notons x le rayon de la seconde bille.

a) Démontrer que x est solution de l'équation

$$(E) \qquad 2x^3 - 75x + 172 = 0$$

b) Résoudre, en justifiant, l'équation (E).

c) Quel est alors le rayon de la seconde bille ?

L'abscisse cherchée est le rayon de la seconde bille …

INDICE : La fonction f est un polynôme du 3e degré qui a pour racines -2 ; 0 et 5, et qui vaut 6 en -1. La fonction g est un polynôme du 2nd degré qui a pour racines -2 et -1, et qui vaut -4 en 0.

L'ordonnée cherchée est le produit des abscisses des points d'intersection des courbes de f et de g …

Correction Qui ?

INDICE : Pour chacune des affirmations suivantes de (P_1) à (P_6), indiquer si elle est vraie ou fausse. Les affirmations vraies doivent être démontrées et, pour les affirmations fausse, un contre-exemple doit être donné.

$$(P_1)\ \text{Si}\ \ z=0\ \ \text{alors}\ \ z+\bar{z}=0$$

Soit z un nombre complexe tel que $z=0$, alors $\bar{z}=0$ et donc $z+\bar{z}=0$.

L'affirmation $(\mathrm{P_1})$ est vraie.

(P_2) est la réciproque de (P_1)

(P_2) s'énonce alors de la façon suivante « Si $z+\bar{z}=0$ alors $z=0$ »

$z+\bar{z}=2\,\mathcal{R}e(z)$, il suffit alors de choisir un nombre complexe imaginaire pur pour prouver que cette affirmation est fausse.

Prenons par exemple $z=2i$, alors $\bar{z}=-2i$. On a alors $z+\bar{z}=2i-2i=0$ mais $z\neq 0$.

L'affirmation $(\mathrm{P_2})$ est fausse.

(P_3) est la contraposée de (P_1)

(P_3) s'énonce alors de la façon suivante « Si $z+\bar{z}\neq 0$ alors $z\neq 0$ »

Soit z un nombre complexe tel que $z+\bar{z}\neq 0$

$z+\bar{z}=2\,\mathcal{R}e(z)\neq 0$ donc $\mathcal{R}e(z)\neq 0$ et donc $z=\mathcal{R}e(z)+i\,Im(z)\neq 0$

L'affirmation $(\mathrm{P_3})$ est vraie.

$$(P_4)\ \text{Si}\ \ z=i\ \ \text{alors}\ \ z+\frac{1}{z}=0$$

Soit z un nombre complexe tel que $z=i$,

alors $\frac{1}{z}=\frac{1}{i}=\frac{1\times i}{i\times i}=\frac{i}{-1}=-i$ et donc $z+\frac{1}{z}=i-i=0$.

L'affirmation $(\mathrm{P_4})$ est vraie.

(P_5) est la réciproque de (P_4)

(P_5) s'énonce alors de la façon suivante « Si $z+\frac{1}{z}=0$ alors $z=i$ »

$$z+\frac{1}{z}=\frac{z^2}{z}+\frac{1}{z}=\frac{z^2+1}{z}=0$$

$$\Leftrightarrow z^2+1=0$$

$$\Leftrightarrow z^2=-1$$

$$\Leftrightarrow z=i\ \ \text{ou}\ z=-i$$

Prenons par exemple $z=-i$, alors $\frac{1}{z}=i$. On a alors $z+\frac{1}{z}=0$ mais $z\neq i$.

L'affirmation $(\mathrm{P_5})$ est fausse.

(P_6) est la contraposée de (P_4)

(P_6) s'énonce alors de la façon suivante « Si $z + \frac{1}{z} \neq 0$ alors $z \neq i$ »

Soit z un nombre complexe tel que $z + \frac{1}{z} \neq 0$

$$z + \frac{1}{z} = \frac{z^2 + 1}{z} \neq 0 \text{ donc } z^2 + 1 \neq 0, \text{soit } z^2 \neq -1 \text{ et donc } z \neq i$$

L'affirmation (P_6) est vraie.

Nous obtenons donc le nombre binaire : ***101101***

Après conversion en décimal :

$$2^5 \times 1 + 2^4 \times 0 + 2^3 \times 1 + 2^2 \times 1 + 2^1 \times 0 + 2^0 \times 1 = 32 + 8 + 4 + 1 = 45$$

$\boxed{4}$ $\boxed{5}$ ***M. Perportho***

Correction Quoi ?

$a)\ Z = 36 + (4 + 5i)^2 + (4 - 5i)^2$

$Z = 36 + 16 + 40i + 25i^2 + 16 - 40i + 25i^2$

$Z = 52 - 25 + 16 - 25$

$Z = \mathbf{18}$

$b)\ Z = \dfrac{3(\sqrt{2} + \sqrt{2}i)^6}{-8i}$

$$Z = \frac{3\left[(\sqrt{2} + \sqrt{2}i)^2\right]^3}{-8i} = \frac{3(2 + 4i + 2i^2)^3}{-8i} = \frac{3(2 + 4i - 2)^3}{-8i}$$

$$Z = \frac{3(4i)^3}{-8i} = \frac{3 \times 4^3 \times i^3}{-2 \times 4i} = \frac{3 \times 4^2 \times i^2}{-2} = \mathbf{24}$$

$c)\ Z = \sqrt{-(\sqrt{3} + i)^6}$

$$Z = \sqrt{-(\sqrt{3} + i)^6} = \sqrt{-\left[(\sqrt{3} + i)^3\right]^2} = \sqrt{-(3\sqrt{3} + 9i + 3\sqrt{3}i^2 + i^3)^2} = \sqrt{-(3\sqrt{3} + 9i - 3\sqrt{3} - i)^2}$$

$$Z = \sqrt{-(8i)^2} = \sqrt{-64\, i^2} = \sqrt{64} = \mathbf{8}$$

$d)\ Z = 8 + 3\left(\dfrac{4-3i}{1-2i} + \dfrac{4+3i}{1+2i}\right)$

$Z = 8 + 3\left(\dfrac{4-3i}{1-2i} + \dfrac{4+3i}{1+2i}\right) = 8 + 3\left(\dfrac{(4-3i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} + \dfrac{(4+3i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}\right)$

$Z = 8 + 3\left(\dfrac{4+8i-3i-6i^2}{1-4i^2} + \dfrac{4-8i+3i-6i^2}{1-4i^2}\right)$

$Z = 8 + 3\left(\dfrac{8+6+6}{1+4}\right) = 8 + 3\left(\dfrac{20}{5}\right) = 8 + 3 \times 4 = 8 + 12 = \mathbf{20}$

$e)\ Z = (1+i)^8$

$Z = [(1+i)^2]^4 = (1+2i+i^2)^4 = (1+2i-1)^4 = (2i)^4$

$Z = 2^4 \times i^4 = \mathbf{16}$

$f)$ $Z = z + \bar{z}$ où z est solution de l'équation $3iz - 5\bar{z} + 16 = 0$

Prenons $z = x + iy$ où $x, y \in \mathbb{R}$, alors $\bar{z} = x - iy$

$$3i(x+iy) - 5(x-iy) + 16 = 0$$

$$3ix + 3i^2y - 5x + 5iy + 16 = 0$$

$$16 - 3y - 5x + i(5y + 3x) = 0$$

On en déduit que $\begin{cases} 16 - 3y - 5x = 0 \\ 5y + 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 3y = 16 \\ 3x + 5y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{cases} 15x + 9y = 48 \\ 15x + 25y = 0 \end{cases} \\ \hline -16y = 48 \\ y = \frac{48}{-16} = -3 \end{array}$

$$3x + 5 \times (-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x = 15 \Leftrightarrow x = \frac{15}{3} = 5$$

$$\text{donc } z = 5 - 3i$$

$$\text{et } Z = z + \bar{z} = 5 - 3i + 5 + 3i = \mathbf{10}$$

$g)$ $Z = z\bar{z}$ où z est solution de l'équation $2z + 10i = 3(\bar{z} - 1)$

Prenons $z = x + iy$ où $x, y \in \mathbb{R}$, alors $\bar{z} = x - iy$

$$2(x+iy) + 10i = 3(x - iy - 1)$$

$$2x + 2iy + 10i = 3x - 3iy - 3$$

$$2x + i(2y + 10) = 3x - 3 - 3iy$$

On en déduit que $\begin{cases} 2x = 3x - 3 \\ 2y + 10 = -3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x = -3 \\ 5y = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -\frac{10}{5} = -2 \end{cases}$

$$\text{donc } z = 3 - 2i$$

$$\text{et } Z = z\bar{z} = (3-2i)(3+2i) = 9 - 4i^2 = \mathbf{13}$$

Nous obtenons donc les nombres suivants : **18 24 8 20 16 10 13**

Ce qui donne SYIUQKN

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

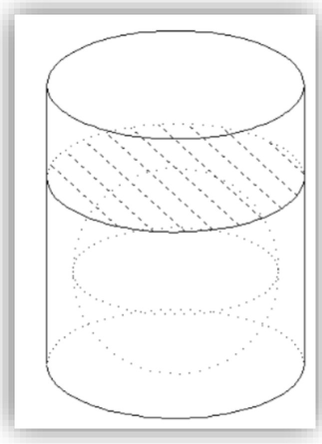
```
Clé :  0 Texte :  SYIUQKN
Clé :  1 Texte :  TZJVRLO
Clé :  2 Texte :  UAKWSMP
Clé :  3 Texte :  VBLXTNQ
Clé :  4 Texte :  WCMYUOR
Clé :  5 Texte :  XDNZVPS
Clé :  6 Texte :  YEOAWQT
Clé :  7 Texte :  ZFPBXRU
Clé :  8 Texte :  AGQCYSV
Clé :  9 Texte :  BHRDZTW
Clé :  10 Texte :  CISEAUX
Clé :  11 Texte :  DJTFBVY
Clé :  12 Texte :  EKUGCWZ
Clé :  13 Texte :  FLVHDXA
Clé :  14 Texte :  GMWIEYB
Clé :  15 Texte :  HNXJFZC
Clé :  16 Texte :  IOYKGAD
Clé :  17 Texte :  JPZLHBE
Clé :  18 Texte :  KQAMICF
Clé :  19 Texte :  LRBNJDG
Clé :  20 Texte :  MSCOKEH
Clé :  21 Texte :  NTDPLFI
Clé :  22 Texte :  OUEQMGJ
Clé :  23 Texte :  PVFRNHK
Clé :  24 Texte :  QWGSOIL
Clé :  25 Texte :  RXHTPJM
```

Nous obtenons donc : ***CISEAUX***

Correction Où ?

INDICE : Dans un vase cylindrique de 10 cm de diamètre intérieur, on dépose une bille parfaitement sphérique de 4 cm de rayon. On verse de l'eau jusqu'à ce que la surface de l'eau soit tangente au sommet de la bille.

▶1. Déterminer la valeur exacte de la quantité d'eau mise dans le vase.



Le volume interne du cylindre pour une hauteur du diamètre de la bille soit 8 cm vaut $\pi R^2 h = \pi \times 5^2 \times 8 = 200\pi$ cm^3.

Le volume de la bille vaut $\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \times 4^3 = \frac{256\pi}{3}$ cm^3.

Le volume d'eau est donc égal à :

$$200\pi - \frac{256\pi}{3} = \boldsymbol{\frac{344\pi}{3}} \textbf{ cm}^{\mathbf{3}}$$

▶2. On remplace la bille par une autre bille de rayon différent en gardant la même quantité d'eau dans le vase. On remarque que la surface de l'eau est encore tangente au sommet de la bille. Notons x le rayon de la seconde bille.

a) Démontrer que x est solution de l'équation

$$(E) \qquad 2x^3 - 75x + 172 = 0$$

Le volume de la nouvelle bille vaut $\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \times x^3$ cm^3.

Le volume interne du cylindre pour une hauteur du diamètre de la nouvelle bille soit $2x$ cm vaut $\pi R^2 h = \pi \times 5^2 \times 2x = 50x \times \pi$ cm^3.

On peut alors écrire l'égalité de volume suivante :

$$\frac{344\pi}{3} + \frac{4}{3}\pi \times x^3 = 50x \times \pi$$

$$\Leftrightarrow 344 + 4x^3 = 150\pi$$
$$\Leftrightarrow 4x^3 - 150\pi + 344 = 0$$
$$\Leftrightarrow \boldsymbol{2x^3 - 75\pi + 172 = 0}$$

b) Résoudre, en justifiant, l'équation (E).

On sait déjà que 4 est solution de l'équation, donc on peut factoriser le polynôme par $(x - 4)$

$$2x^3 - 75\pi + 172 = (x-4)(2x^2 + ax - 43)$$
$$= 2x^3 + ax^2 - 43x - 8x^2 - 4ax + 172$$
$$= 2x^3 + (a-8)x^2 - (43+4a)x + 172$$
$$\text{donc } \begin{cases} a - 8 = 0 \\ 43 + 4a = 75 \end{cases} \Leftrightarrow a = 8$$

$$2x^3 - 75\pi + 172 = 0$$
$$(x-4)(2x^2 + 8x - 43) = 0$$
$$x - 4 = 0 \quad \text{ou} \quad 2x^2 + 8x - 43 = 0$$
$$\Delta = 64 - 4 \times 2 \times (-43) = 408 > 0$$
$$x = 4$$
$$\text{ou } x_1 = \frac{-8 - \sqrt{408}}{4} = \frac{-4 - \sqrt{102}}{2} \approx -7$$
$$\text{ou } x_2 = \frac{-8 + \sqrt{408}}{4} = \frac{-4 + \sqrt{102}}{2} \approx 3{,}05$$

c) Quel est alors le rayon de la seconde bille ?

La seconde bille a alors pour rayon $\mathbf{\frac{-4+\sqrt{102}}{2} \approx 3{,}05\ cm}$.

INDICE : La fonction f est un polynôme du 3e degré qui a pour racines -2 ; 0 et 5, et qui vaut 6 en -1.
La fonction g est un polynôme du 2nd degré qui a pour racines -2 et -1, et qui vaut -4 en 0.

L'ordonnée cherchée est le produit des abscisses des points d'intersection des courbes de f et de g …

La fonction f s'écrit $f(x) = ax(x+2)(x-5)$ et $f(-1) = 6$

$$f(-1) = -a(-1+2)(-1-5) = 6$$
$$f(-1) = -a \times 1 \times (-6) = 6$$
$$6a = 6$$
$$a = 1$$
$$\text{donc} \quad f(x) = x(x+2)(x-5)$$
$$f(x) = (x^2+2x)(x-5)$$
$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x^2 - 10x$$
$$\boldsymbol{f(x) = x^3 - 3x^2 - 10x}$$

La fonction g s'écrit $g(x) = a(x+2)(x+1)$ et $g(0) = -4$

$$g(0) = a(0+2)(0+1) = -4$$
$$2a = -4$$
$$a = -2$$
$$\text{donc} \quad g(x) = -2(x+2)(x+1)$$
$$g(x) = -2(x^2+3x+2)$$
$$\boldsymbol{g(x) = -2x^2 - 6x - 4}$$

L'abscisse des points d'intersection vérifient l'équation :

$$f(x) = g(x)$$
$$x^3 - 3x^2 - 10x = -2x^2 - 6x - 4$$
$$x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$$

1 est une solution évidente de l'équation, donc on peut factoriser le polynôme par $(x-1)$

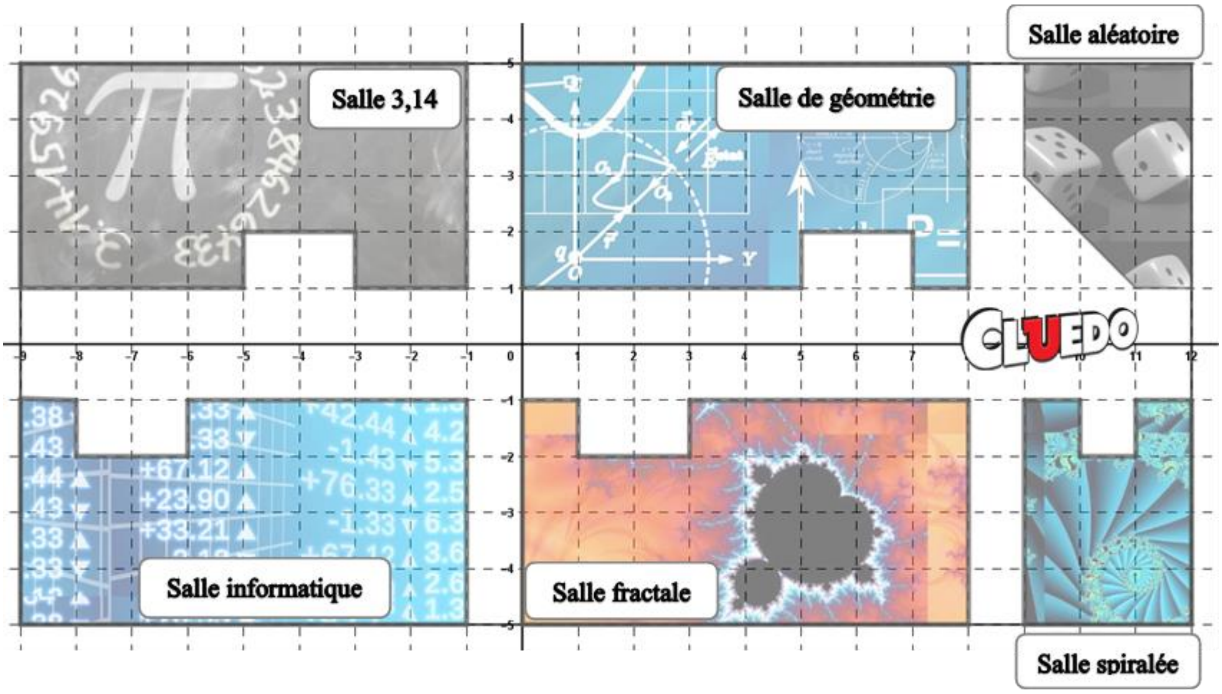
$$\begin{aligned} x^3 - x^2 - 4x + 4 &= (x-1)(x^2 + ax - 4) \\ &= x^3 + ax^2 - 4x - x^2 - ax + 4 \\ &= x^3 + (a-1)x^2 - (4+a)x + 4 \end{aligned}$$

$$\text{donc} \quad \begin{cases} a - 1 = -1 \\ 4 + a = 4 \end{cases} \Leftrightarrow a = 0$$

$$x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$$
$$(x-1)(x^2-4) = 0$$
$$x - 1 = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 - 4 = 0$$
$$x = 1 \quad \text{ou} \quad x^2 = 4$$
$$x = 1 \quad \text{ou} \quad x = 2 \quad \text{ou} \quad x = -2$$

Nous obtenons donc pour abscisse : 3,05

Et pour ordonnée : $(-2)\times 2\times 1=-4$



Salle fractale