LYCEE Polyvalent Albert EINSTEIN

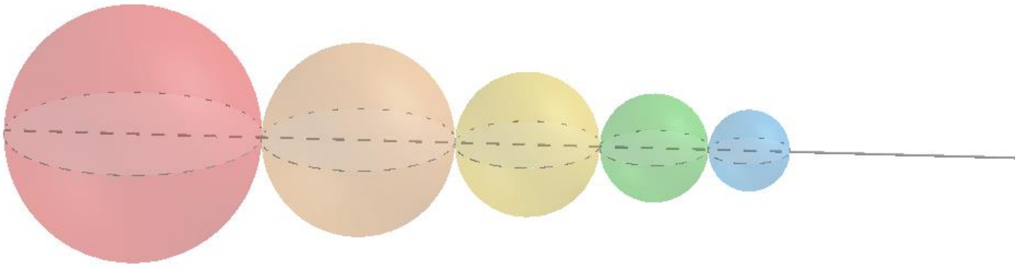
Devoir à rédiger n°2
Terminale Maths Expertes

Table des matières

Devoir à rédiger n°2
Terminale Maths Expertes

Sujet

Exercice n°1 : Une guirlande complexe …



Partie A.
Soit $k \in \mathbb{C}$, pour tout entier naturel n, on définit la suite de nombres complexes (z_n) par

$$z_0 = 0 \text{ et}, \forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = kz_n + i$$

▶1. Déterminer les quatre premiers termes de la suite (z_n).

▶2. Démontrer, par récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N}, z_n = \frac{1-k^n}{1-k} i$.

▶3. On pose, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \mathcal{Im}(z_{n+1} - z_n)$ (partie imaginaire).

a) Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison k.

b) En déduire une expression de u_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.

▶4. Dans cette partie, on suppose que $k = i$,

Démontrer que $\begin{cases} \text{si } n \equiv 0\ [4] \text{ alors } z_n = 0 \\ \text{si } n \equiv 1\ [4] \text{ alors } z_n = i \\ \text{si } n \equiv 2\ [4] \text{ alors } z_n = -1 + i \\ \text{si } n \equiv 3\ [4] \text{ alors } z_n = -1 \end{cases}$

Partie B.
Afin de décorer sa rue pour les fêtes de fin d'année, Hugo Duminil-Copin dispose d'un fil de 4 mètres. Il fabrique une guirlande comme représenté ci-dessus, en fixant des boules de Noël côte à côte. La première boule a pour diamètre 1 mètre. Ensuite, chaque boule a un diamètre réduit de 25% du diamètre précédent.

▶1. Qui est Hugo Duminil-Copin ?

▶2a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note d_n le diamètre de la n^e boule. Déterminer la longueur de la guirlande composée de n boules.

b) En déduire la longueur de la guirlande si on continue le processus à l'infini.

▶3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note V_n le volume de la n^e boule.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, écrire V_n en fonction de n.

b) Démontrer que la suite (V_n) est géométrique. On précisera ses paramètres.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} V_k$. En déduire $\lim_{n \to +\infty} S_n$

Exercice n°2 : Tout mes meilleurs vœux pour l'année 2023 !

Démontrez les affirmations suivantes …

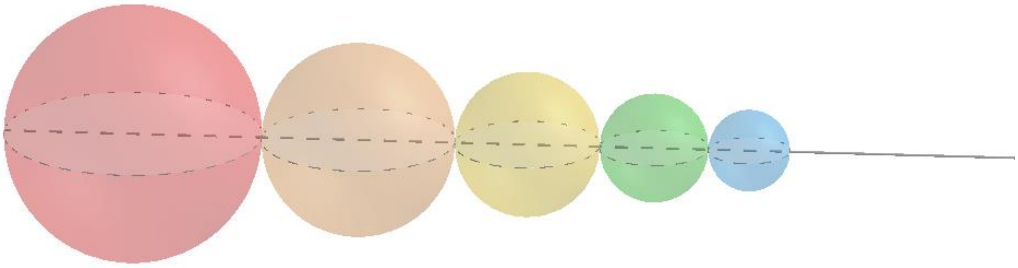
Le nombre 2023^{2023}

- est impair
- n'est pas divisible par 3
- a 7 pour chiffre des unités
- est congru à 7 modulo 9
- $2023^{2023} - 2$ est divisible par 5
- $2023^{2023} \equiv 1\ [6]$
- a pour reste 3 dans la division euclidienne par 4
- 8 divise $2023^{2023} + 1$
- est divisible par 7

CORRECTION du devoir à rédiger n°2
Correction du Sujet

Exercice 1.

Exercice n°1 : Une guirlande complexe …



Partie A.

Soit $k \in \mathbb{C}$, pour tout entier naturel n, on définit la suite de nombres complexes (z_n) par

$$z_0 = 0 \text{ et, } \forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = kz_n + i$$

▶1. Déterminer les quatre premiers termes de la suite (z_n).

▶2. Démontrer, par récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_n = \frac{1-k^n}{1-k} i$.

▶3. Dans cette partie, on suppose que $k \in \mathbb{R}$, on pose, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \mathcal{Im}(z_{n+1} - z_n)$

a) Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison k.

b) En déduire une expression de u_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.

▶4. Dans cette partie, on suppose que $k = i$,

Démontrer que $\begin{cases} \text{si } n \equiv 0\ [4] \text{ alors } z_n = 0 \\ \text{si } n \equiv 1\ [4] \text{ alors } z_n = i \\ \text{si } n \equiv 2\ [4] \text{ alors } z_n = -1 + i \\ \text{si } n \equiv 3\ [4] \text{ alors } z_n = -1 \end{cases}$

Partie B.

Afin de décorer sa rue pour les fêtes de fin d'année, Hugo Duminil-Copin dispose d'un fil de 4 mètres. Il fabrique une guirlande comme représenté ci-dessus, en fixant des boules de Noël côte à côte. La première boule a pour diamètre 1 mètre. Ensuite, chaque boule a un diamètre réduit de 25% du diamètre précédent.

▶1. Qui est Hugo Duminil-Copin ?

▶2a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note d_n le diamètre de la n^e boule. Déterminer la longueur de la guirlande composée de n boules.

b) En déduire la longueur de la guirlande si on continue le processus à l'infini.

▶3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note V_n le volume de la n^e boule.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, écrire V_n en fonction de n.

b) Démontrer que la suite (V_n) est géométrique. On précisera ses paramètres.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} V_k$. En déduire $\lim_{n \to +\infty} S_n$

Partie A.	**1.**	Soit $k \in \mathbb{C}$, $z_0 = 0$ et, $\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = kz_n + i$ $z_0 = 0$ Pour $n = 0$, $z_1 = kz_0 + i = k \times 0 + i = i$ Pour $n = 1$, $z_2 = kz_1 + i = k \times i + i = (k+1)i$ Pour $n = 2$, $z_3 = kz_2 + i = k(k+1)i + i = (k^2 + k + 1)i$ Pour $n = 3$, $z_4 = kz_3 + i = k(k^2 + k + 1)i + i = (k^3 + k^2 + k + 1)i$
	2.	Démontrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$: $z_n = \frac{1-k^n}{1-k} i$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. **Initialisation** pour $n = 0$: $$\frac{1-k^0}{1-k} i = \frac{1-1}{1-k} i = 0 = z_0$$ **donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.** **Hérédité : On suppose que $\mathcal{P}(n)$** : $z_n = \frac{1-k^n}{1-k} i$ **est vraie** pour $n \in \mathbb{N}$ fixé $$z_{n+1} = kz_n + i$$ or, par hypothèse de récurrence, $z_n = \frac{1-k^n}{1-k} i$ donc, $z_{n+1} = k \times \frac{1-k^n}{1-k} i + i$ *Je factorise par i* $$z_{n+1} = \left(k \times \frac{1-k^n}{1-k} + 1\right) i$$ *Je réduis au même dénominateur* $$z_{n+1} = \left(\frac{k(1-k^n)}{1-k} + \frac{1-k}{1-k}\right) i$$ $$z_{n+1} = \left(\frac{k - k^{n+1} + 1 - k}{1-k}\right) i$$ $$z_{n+1} = \left(\frac{1-k^{n+1}}{1-k}\right) i$$ **donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie** **Par conséquent : $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$** donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_n = \frac{1-k^n}{1-k} i$

	3a	Soit $n \in \mathbb{N}$, $$u_{n+1} = \mathcal{Im}(z_{n+2} - z_{n+1})$$ $$z_{n+1} = kz_n + i \text{ et } z_{n+2} = kz_{n+1} + i$$ $$u_{n+1} = \mathcal{Im}\big(kz_{n+1} + i - (kz_n + i)\big)$$ $$u_{n+1} = \mathcal{Im}(kz_{n+1} + i - kz_n - i)$$ $$u_{n+1} = \mathcal{Im}(kz_{n+1} - kz_n)$$ $$u_{n+1} = \mathcal{Im}\big(k(z_{n+1} - z_n)\big)$$ $$u_{n+1} = k \times u_n$$ La suite (u_n) est donc une suite géométrique de raison k.
	3b	$u_0 = k^0 = 1$ On en déduit que, pour tout entier naturel n, $u_n = k^n$
	4.	$k = i, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \ z_n = \dfrac{1 - i^n}{1 - i} i$ **Cas n°1 :** si $n \equiv 0\ [4]$ alors $i^n = 1$ et donc $z_n = \dfrac{1 - 1}{1 - i} i = 0$ **Cas n°2 :** si $n \equiv 1\ [4]$ alors $i^n = i$ et donc $z_n = \dfrac{1 - i}{1 - i} i = i$ **Cas n°3 :** si $n \equiv 2\ [4]$ alors $i^n = -1$ et donc $z_n = \dfrac{1 - (-1)}{1 - i} i = \dfrac{2i}{1 - i} = \dfrac{2i(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)}$ $z_n = \dfrac{2i(1 + i)}{1 - i^2} = \dfrac{2i(1 + i)}{2} = i(1 + i) = i + i^2 = -1 + i$ **Cas n°4 :** si $n \equiv 3\ [4]$ alors $i^n = -i$ et donc $z_n = \dfrac{1 - (-i)}{1 - i} i = \dfrac{1 + i}{1 - i} i = \dfrac{(1 + i)^2}{(1 - i)(1 + i)} i$ $z_n = \dfrac{1 + 2i + i^2}{1 - i^2} \times i = \dfrac{1 + 2i - 1}{1 + 1} \times i = \dfrac{2i}{2} \times i = -1$

Partie B.

1.

Hugo Duminil-Copin est un mathématicien français spécialisé dans les probabilités.

Professeur permanent à l'Institut des Hautes Études Scientifiques (IHES, université Paris Saclay) depuis 2016, il a reçu la médaille Fields en 2022.

Après son baccalauréat et ses classes préparatoires, il intègre l'École normale supérieure de la rue d'Ulm puis fait une thèse suivie d'un postdoctorat à l'université de Genève.

2a

$$d_1 = 1$$

Chaque boule a un diamètre réduit de 25% du diamètre précédent.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \;\; d_{n+1} = 0{,}75\, d_n$$

La suite (d_n) est donc une suite géométrique de raison 0,75. On en déduit que, $\forall n \in \mathbb{N}^* \;\; d_n = d_1 \times q^{n-1} = 0{,}75^{n-1}$

La longueur de la guirlande composée de n boules sera alors :

$$L_n = d_1 + d_2 + \cdots + d_n = 1 + 0{,}75 + 0{,}75^2 + \cdots + 0{,}75^{n-2} + 0{,}75^{n-1}$$

$$= \frac{1 - 0{,}75^n}{1 - 0{,}75} = \frac{1 - 0{,}75^n}{0{,}25} = 4(1 - 0{,}75^n)$$

2b

$$\lim_{n \to +\infty} 0{,}75^n = 0 \text{ car } 0 < 0{,}75 < 1$$

donc $\displaystyle \lim_{n \to +\infty} L_n = \lim_{n \to +\infty} 4(1 - 0{,}75^n) = 4$

Si on continue le processus à l'infini, la guirlande tendra vers 4 mètres.

3a

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$V_n = \frac{4}{3}\pi \times \left(\frac{d_n}{2}\right)^3$$

$$V_n = \frac{4}{3}\pi \times \left(\frac{0{,}75^{n-1}}{2}\right)^3$$

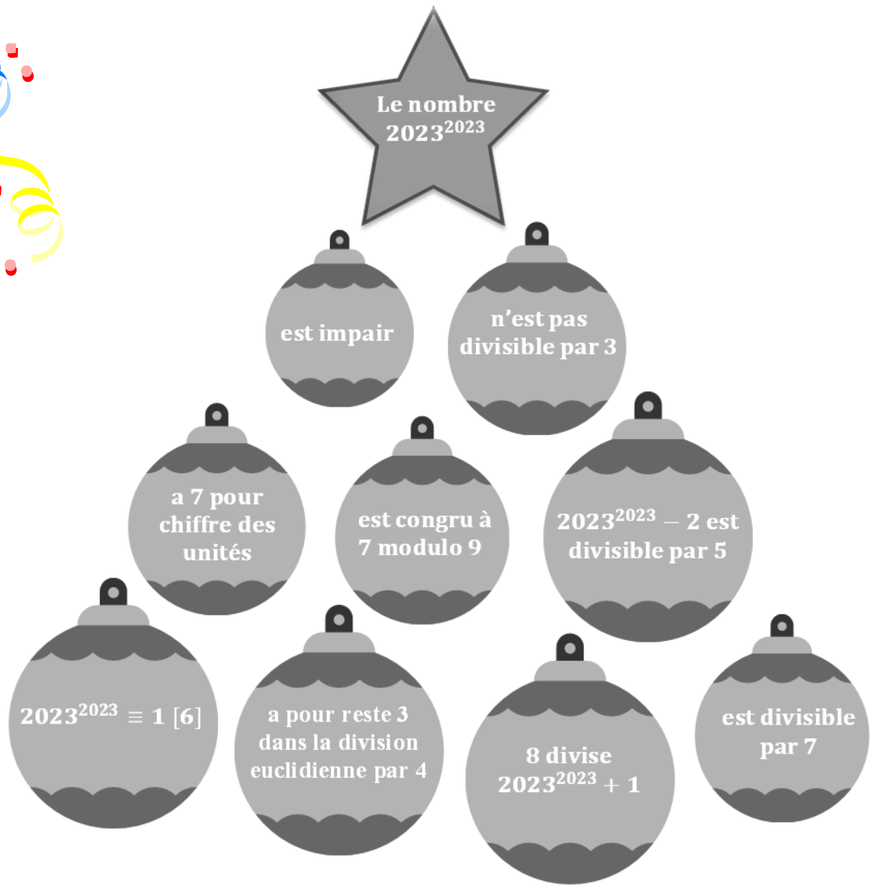
$$V_n = \frac{4}{3}\pi \times \frac{(0{,}75^{n-1})^3}{8}$$

$$V_n = \frac{\pi}{6} \times 0{,}75^{3n-3} = \frac{\pi}{6} \times (0{,}75^3)^{n-1}$$

	3b	Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $V_{n+1} = \frac{\pi}{6} \times 0{,}75^{3(n+1)-3}$ $V_{n+1} = \frac{\pi}{6} \times 0{,}75^{3n+3-3}$ $V_{n+1} = \frac{\pi}{6} \times 0{,}75^{3n-3} \times 0{,}75^3$ $V_{n+1} = V_n \times 0{,}75^3$ La suite (V_n) est donc géométrique de raison $0{,}75^3$ et $V_1 = \frac{\pi}{6}$ Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, V_n = \frac{\pi}{6} \times (0{,}75^3)^{n-1}$
	3c	Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} V_k = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} \times 0{,}75^3 + \frac{\pi}{6} \times (0{,}75^3)^2 + \cdots + \frac{\pi}{6} \times (0{,}75^3)^{n-1}$ $S_n = \frac{\pi}{6} \times \frac{1-(0{,}75^3)^n}{1-0{,}75^3}$ $\lim_{n\to+\infty} (0{,}75^3)^n = 0 \text{ car } 0 < 0{,}75^3 < 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{\pi}{6} \times \frac{1}{1-0{,}75^3} \approx 0{,}9057 \text{ m}^3$

Exercice 2.

Démontrez les affirmations suivantes ...



Exercice 2.	**1.**	$$2023 \equiv 1\ [2]$$ $$2023^{2023} \equiv 1^{2023}\ [2] \equiv 1\ [2]$$ 2023^{2023} est donc impair.
	2.	$$2023 \equiv 1\ [3]$$ $$2023^{2023} \equiv 1^{2023}\ [3] \equiv 1\ [3]$$ 2023^{2023} n'est donc pas divisible par 3.
	3.	$$2023 \equiv 3\ [10]$$ $$\text{or } 3^4 \equiv 81\ [10] \equiv 1\ [10]$$ $$\text{donc } 2023^4 \equiv 1\ [10]$$ $$\text{et donc } (2023^4)^{505} \equiv 2023^{2020}\ [10] \equiv 1\ [10]$$ $$2023^{2023} \equiv 2023^{2020} \times 2023^3\ [10]$$ $$2023^{2023} \equiv 1 \times 3^3\ [10]$$ $$2023^{2023} \equiv 27\ [10] \equiv 7\ [10]$$ 2023^{2023} a donc 7 pour chiffre des unités.
	4.	$$2023 \equiv 7\ [9]$$ $$\text{or } 7^3 \equiv 343\ [9] \equiv 1\ [9]$$ $$\text{donc } 2023^3 \equiv 7^3\ [9] \equiv 1\ [9]$$ $$\text{et donc } (2023^3)^{674} \equiv 2023^{2022}\ [9] \equiv 1\ [9]$$ $$2023^{2023} \equiv 2023^{2022} \times 2023\ [9]$$ $$2023^{2023} \equiv 1 \times 7\ [9]$$ $$2023^{2023} \equiv 7\ [9]$$

	5.	$2023 \equiv 3\ [5]$ or $3^4 \equiv 81\ [5] \equiv 1\ [5]$ donc $2023^4 \equiv 1\ [5]$ et donc $(2023^4)^{505} \equiv 2023^{2020}\ [5] \equiv 1\ [5]$ $2023^{2023} \equiv 2023^{2020} \times 2023^3\ [5]$ $2023^{2023} \equiv 1 \times 3^3\ [5]$ $2023^{2023} \equiv 27\ [5] \equiv 2\ [5]$ donc $2023^{2023} - 2$ est divisible par 5.
	6.	$2023 \equiv 1\ [6]$ $2023^{2023} \equiv 1^{2023}\ [6]$ donc $2023^{2023} \equiv 1\ [6]$
	7.	$2023 \equiv 3\ [4] \equiv -1\ [4]$ donc $2023^{2023} \equiv (-1)^{2023}\ [4]$ $2023^{2023} \equiv -1\ [4] \equiv 3\ [4]$ donc 2023^{2023} a pour reste 3 dans la division euclidienne par 4.
	8.	$2023 \equiv 7\ [8] \equiv -1\ [8]$ donc $2023^{2023} \equiv (-1)^{2023}\ [8]$ $2023^{2023} \equiv -1\ [8]$ donc $2023^{2023} + 1 \equiv 0\ [8]$ donc 8 divise $2023^{2023} + 1$.
	9.	$2023 \equiv 0\ [7]$ donc $2023^{2023} \equiv 0\ [7]$ donc 7 divise 2023^{2023}