

Table des matières

Sujet	2
Partie A.....	2
Partie B.....	2
Partie C.....	2
Correction du Sujet	3
Partie A.....	3
Partie B.....	4
Partie C.....	5

Devoir à rédiger n°3

Terminale Générale - Maths Expertes

Sujet

Partie A

- Pour tout entier naturel n , on définit les entiers $a_n = 6 \times 5^n - 2$ et $b_n = 3 \times 5^n + 1$.
- 1. a. Montrer que, pour tout entier naturel n , chacun des entiers a_n et b_n est congru à 0 modulo 4.
- b. Pour tout entier naturel n , calculer $2b_n - a_n$.
- c. Déterminer le PGCD de a_n et b_n .
- 2. a. Montrer que $b_{2020} \equiv 3 \times 2^{2020} + 1 \pmod{7}$.
- b. Montrer que b_{2020} est divisible par 7.
- c. L'entier a_{2020} est-il divisible par 7 ? Justifier la réponse.

Partie B

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_0 = v_0 = 1 \text{ et, pour tout entier naturel } n, \begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + 4v_n \\ v_{n+1} = u_n + 3v_n \end{cases}$$

Pour un entier naturel N donné, on souhaite calculer les termes de rang N des suites (u_n) et (v_n) et on se demande si l'algorithme ci-contre permet ce calcul.

- 1. On fait fonctionner l'algorithme avec $N = 2$. Compléter le tableau ci-contre en donnant les valeurs successivement affectées aux variables u , v et k .

```

u=1
v=1
k=0
while k<N:
    u=3*u+4*v
    v=u+3*v
    k=k+1
    
```

u	v	k
1	1	0
		1

- 2. L'algorithme permet-il effectivement de calculer u_N et v_N pour une valeur de N donnée ? Dans le cas contraire, écrire sur la copie une version corrigée de cet algorithme afin que les variables u et v contiennent bien les valeurs de u_N et v_N à la fin de son exécution.

Partie C

Pour tout entier naturel n , on définit la matrice colonne $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

- 1. Donner, sans justification, une matrice carrée A d'ordre 2 telle que, pour tout entier naturel n , $X_{n+1} = AX_n$.
- 2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $X_n = A^n X_0$.
- 3. On admet que, pour tout entier naturel n ,

$$A^n = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 \times 5^n + 2 & 4 \times 5^n - 4 \\ 5^n - 1 & 2 \times 5^n + 2 \end{pmatrix}.$$

Montrer que, pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{a_n}{4}$ et $v_n = \frac{b_n}{4}$, où a_n et b_n sont les nombres entiers définis dans la partie A.

- 4. Justifier que, pour tout entier naturel n , u_n et v_n sont premiers entre eux.

Correction du devoir à rédiger n°3
Terminale Générale - Maths Expertes
Correction du Sujet

Partie A

Pour tout entier naturel n , on définit les entiers $a_n = 6 \times 5^n - 2$ et $b_n = 3 \times 5^n + 1$.

► 1. a. Montrer que, pour tout entier naturel n , chacun des entiers a_n et b_n est congru à 0 modulo 4.

b. Pour tout entier naturel n , calculer $2b_n - a_n$.

c. Déterminer le PGCD de a_n et b_n .

► 2. a. Montrer que $b_{2020} \equiv 3 \times 2^{2020} + 1 [7]$.

b. Montrer que b_{2020} est divisible par 7.

c. L'entier a_{2020} est-il divisible par 7 ? Justifier la réponse.

1a.	$5 \equiv 1 [4]$ Pour tout entier naturel n, $5^n \equiv 1^n \equiv 1 [4]$ <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 50%; text-align: center; border-right: 1px dotted black;"> $6 \times 5^n \equiv 6 [4]$ $6 \times 5^n - 2 \equiv 4 [4]$ $a_n \equiv 0 [4]$ </td><td style="width: 50%; text-align: center;"> $3 \times 5^n \equiv 3 [4]$ $3 \times 5^n + 1 \equiv 4 [4]$ $b_n \equiv 0 [4]$ </td></tr> </table>	$6 \times 5^n \equiv 6 [4]$ $6 \times 5^n - 2 \equiv 4 [4]$ $a_n \equiv 0 [4]$	$3 \times 5^n \equiv 3 [4]$ $3 \times 5^n + 1 \equiv 4 [4]$ $b_n \equiv 0 [4]$
$6 \times 5^n \equiv 6 [4]$ $6 \times 5^n - 2 \equiv 4 [4]$ $a_n \equiv 0 [4]$	$3 \times 5^n \equiv 3 [4]$ $3 \times 5^n + 1 \equiv 4 [4]$ $b_n \equiv 0 [4]$		
1b.	Pour tout entier naturel n, $2b_n - a_n = 2(3 \times 5^n + 1) - (6 \times 5^n - 2)$ $2b_n - a_n = 6 \times 5^n + 2 - 6 \times 5^n + 2$ $2b_n - a_n = 4$		
1c.	Soit $n \in \mathbb{N}$, a_n et b_n sont divisibles par 4 donc $PGCD(a_n; b_n) \geq 4$ de plus, $\left. \begin{array}{l} PGCD(a_n; b_n) a_n \\ \text{et} \\ PGCD(a_n; b_n) b_n \end{array} \right\}$ donc $PGCD(a_n; b_n) 2b_n - a_n$ On en déduit que $PGCD(a_n; b_n) 4$ et donc que $PGCD(a_n; b_n) = 4$		
2a.	$5 \equiv -2 [7]$ $5^{2020} \equiv (-2)^{2020} [7] \equiv 2^{2020} [7]$ $3 \times 5^{2020} \equiv 3 \times 2^{2020} [7]$ $3 \times 5^{2020} + 1 \equiv 3 \times 2^{2020} + 1 [7]$ $b_{2020} \equiv 3 \times 2^{2020} + 1 [7]$		

2b.	$2^3 \equiv 1 [7]$ $(2^3)^{673} = 2^{2019} \equiv 1 [7]$ $2^{2020} \equiv 2 [7]$ $3 \times 2^{2020} \equiv 6 [7]$ $3 \times 2^{2020} + 1 \equiv 7 [7]$ $b_{2020} \equiv 0 [7]$ b_{2020} est donc divisible par 7.
2c.	Puisque $PGCD(a_{2020}; b_{2020}) = 4$, alors 7 ne peut pas être un diviseur commun à a_{2020} et b_{2020} . Donc, a_{2020} n'est pas divisible par 7.



Partie B

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_0 = v_0 = 1 \text{ et, pour tout entier naturel } n, \begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + 4v_n \\ v_{n+1} = u_n + 3v_n \end{cases}$$

Pour un entier naturel N donné, on souhaite calculer les termes de rang N des suites (u_n) et (v_n) et on se demande si l'algorithme ci-contre permet ce calcul.

► 1. On fait fonctionner l'algorithme avec $N = 2$.

Compléter le tableau ci-contre en donnant les valeurs successivement affectées aux variables u , v et k .

```

u=1
v=1
k=0
while k<N:
    u=3*u+4*v
    v=u+3*v
    k=k+1

```

u	v	k
1	1	0
		1

► 2. L'algorithme permet-il effectivement de calculer u_N et v_N pour une valeur de N donnée ? Dans le cas contraire, écrire sur la copie une version corrigée de cet algorithme afin que les variables u et v contiennent bien les valeurs de u_N et v_N à la fin de son exécution.



1.	<table><tr><td>u</td><td>v</td><td>k</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>7</td><td>10</td><td>1</td></tr><tr><td>61</td><td>91</td><td>2</td></tr></table>	u	v	k	1	1	0	7	10	1	61	91	2	<table><tr><td></td><td>A</td><td>B</td><td>C</td></tr><tr><td>1</td><td>u</td><td>v</td><td>k</td></tr><tr><td>2</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>3</td><td>7</td><td>4</td><td>1</td></tr><tr><td>4</td><td>37</td><td>19</td><td>2</td></tr></table>		A	B	C	1	u	v	k	2	1	1	0	3	7	4	1	4	37	19	2
u	v	k																																
1	1	0																																
7	10	1																																
61	91	2																																
	A	B	C																															
1	u	v	k																															
2	1	1	0																															
3	7	4	1																															
4	37	19	2																															
2.	Cet algorithme ne permet pas de calculer u_N et v_N. En effet, le calcul de v_1 nécessite la valeur de u_0, mais, dans l'algorithme la variable u est remplacée par la valeur u_1.	<pre>u=1 v=1 k=0 while k<N: stokage=u u=3*u+4*v v=stokage+3*v k=k+1</pre>																																



Partie C

Pour tout entier naturel n , on définit la matrice colonne $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

► 1. Donner, sans justification, une matrice carrée A d'ordre 2 telle que, pour tout entier naturel n , $X_{n+1} = AX_n$.

► 2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $X_n = A^n X_0$.

► 3. On admet que, pour tout entier naturel n ,

$$A^n = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 \times 5^n + 2 & 4 \times 5^n - 4 \\ 5^n - 1 & 2 \times 5^n + 2 \end{pmatrix}.$$

Montrer que, pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{a_n}{4}$ et $v_n = \frac{b_n}{4}$, où a_n et b_n sont les nombres entiers définis dans la partie A.

► 4. Justifier que, pour tout entier naturel n , u_n et v_n sont premiers entre eux.

1.	$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + 4v_n \\ v_{n+1} = u_n + 3v_n \end{cases}$ donc $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ donc $X_{n+1} = A X_n$ avec $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
2.	$\mathcal{P}(n) : X_n = A^n X_0$ Initialisation, pour $n = 0$: $X_0 = I_2 X_0 = A^0 X_0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie. Hérédité : Je suppose que $\mathcal{P}(n) : X_n = A^n X_0$ est vraie pour n entier naturel fixé, $X_{n+1} = A X_n$ $X_{n+1} = A A^n X_0 = A^{n+1} X_0$ donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie Conclusion : On en déduit que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n) : X_n = A^n X_0$ est vraie.
3.	$\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0$ $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 \times 5^n + 2 & 4 \times 5^n - 4 \\ 5^n - 1 & 2 \times 5^n + 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 \times 5^n + 2 & 4 \times 5^n - 4 \\ 5^n - 1 & 2 \times 5^n + 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 \times 5^n + 2 + 4 \times 5^n - 4 \\ 5^n - 1 + 2 \times 5^n + 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 6 \times 5^n - 2 \\ 3 \times 5^n + 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ On a alors, pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{a_n}{4}$ et $v_n = \frac{b_n}{4}$.
4.	$\forall n \in \mathbb{N}, \text{PGCD}(a_n; b_n) = 4$ alors, on peut écrire que, $a_n = 4u$ et $b_n = 4v$ où u et v sont premiers entre eux donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{a_n}{4}$ et $v_n = \frac{b_n}{4}$ sont premiers entre eux.