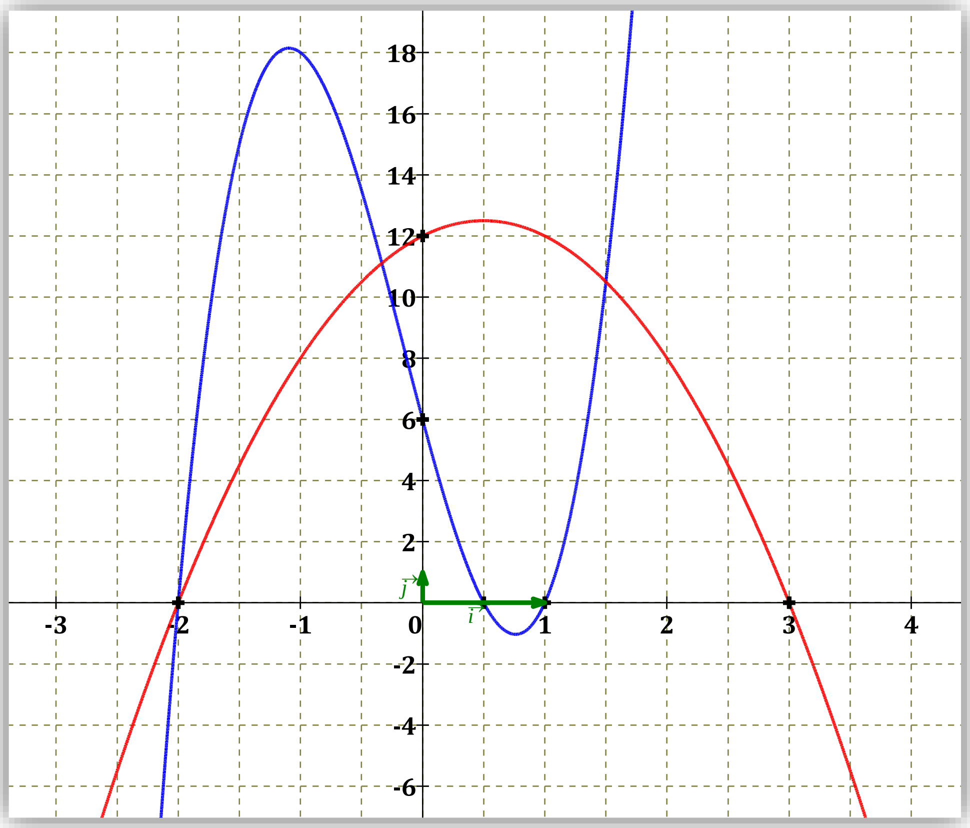
Terminale Maths Expertes

Fiche d'exercices de préparation au contrôle n°1

Exercice 1.

Dans le repère orthogonal direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ ci-dessous, on a représenté une fonction f polynôme de degré 3 et une fonction g polynôme de degré 2.



▶1. A l'aide des points placés sur le graphique, déterminer l'expression algébrique de la fonction f. *On détaillera la méthode.*

▶2. A l'aide des points placés sur le graphique, déterminer l'expression algébrique de la fonction g. *On détaillera la méthode.*

▶3. Déterminer tous les points d'intersection entre la courbe de f et celle de g.

Exercice 2.

▶1. On considère les nombres complexes suivants : $z_1 = -1 + i$ et $z_2 = 3 - 4i$.

a) Ecrire sous forme algébrique $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \times z_2$ et $(z_1)^2$.

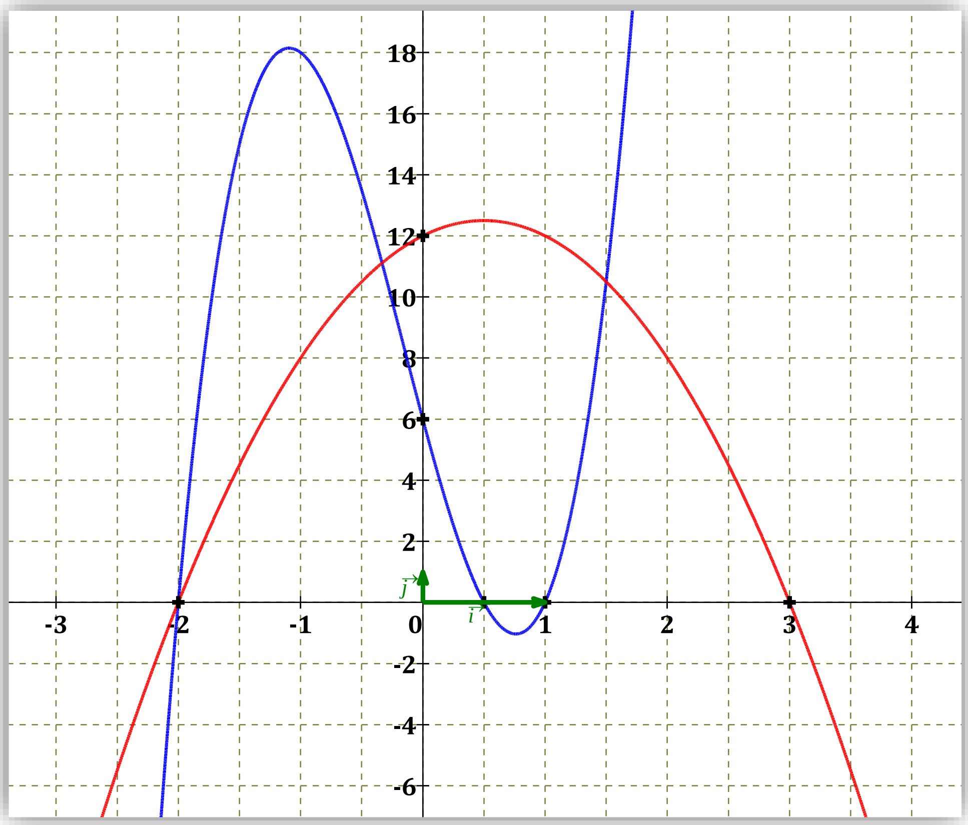
b) Ecrire sous forme algébrique z_1/z_2 .

▶2. a) Calculer $\left(\sqrt{3} + i\right)^3$.

b) Le nombre $\left(\sqrt{3} + i\right)^{2022}$ est-il un nombre réel ? *On justifiera sa réponse.*

Exercice 1.

Dans le repère orthogonal direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ ci-dessous, on a représenté une fonction f polynôme de degré 3 et une fonction g polynôme de degré 2.



▶1. A l'aide des points placés sur le graphique, déterminer l'expression algébrique de la fonction f. *On détaillera la méthode.*

La fonction polynôme f du 3ᵉ degré a pour racines : $-2, 0.5$ « *et* » 1, elle peut donc s'écrire sous la forme

$$f(x) = a(x+2)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-1)$$

De plus, la courbe de la fonction f passe par le point de coordonnées : (0 ; 6). J'en déduis que $f(0) = 6 = a(0+2)\left(0 - \frac{1}{2}\right)(0-1)$

$$6 = a \times 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times (-1)$$

Donc $a = 6$ et $f(x) = 6(x+2)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-1)$.

▶2. A l'aide des points placés sur le graphique, déterminer l'expression algébrique de la fonction g. *On détaillera la méthode.*

La fonction polynôme g du 2nd degré a pour racines : -2 « *et* » 3, elle peut donc s'écrire sous la forme

$$g(x) = a(x+2)(x-3)$$

De plus, la courbe de la fonction g passe par le point de coordonnées : (0 ; 12). J'en déduis que $g(0) = 12 = a(0+2)(0-3)$

$$12 = a \times 2 \times (-3)$$
$$-6a = 12$$
$$a = \frac{-12}{6} = -2$$

Donc $g(x) = -2(x+2)(x-3)$.

▶3. Déterminer tous les points d'intersection entre la courbe de f et celle de g.

Je résous $f(x) = g(x)$

$$6(x+2)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1) = -2(x+2)(x-3)$$
$$6(x+2)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1) + 2(x+2)(x-3) = 0$$

Méthode n°1 : Par facteur commun

$$(x+2)\left[6\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1) + 2(x-3)\right] = 0$$
$$(x+2)[(6x-3)(x-1)+2x-6] = 0$$
$$(x+2)(6x^2-6x-3x+3+2x-6) = 0$$
$$(E) \qquad (x+2)\underbrace{(6x^2-7x-3)}_{\Delta=49-4\times(-18)} = 0$$
$$\Delta = 121$$
$$x_1 = \frac{7-11}{12} = -\frac{4}{12} = -\frac{1}{3}$$
$$x_2 = \frac{7+11}{12} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$$

L'équation (E) devient alors

$$(E) \qquad 6(x+2)\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right) = 0$$

Si $x = -2$ alors $g(x) = g(-2) = -2(-2+2)(-2-3) = 0$

Si $x = \frac{-1}{3}$ alors $g(x) = g\left(\frac{-1}{3}\right) = -2\left(\frac{-1}{3}+2\right)\left(\frac{-1}{3}-3\right) = -2 \times \frac{5}{3} \times \frac{-10}{3} = \frac{100}{9} \approx 11{,}11$

Si $x = \frac{3}{2}$ alors $g(x) = g\left(\frac{3}{2}\right) = -2\left(\frac{3}{2}+2\right)\left(\frac{3}{2}-3\right) = -2 \times \frac{7}{2} \times \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{42}{4} = \frac{21}{2} = 10{,}5$

Il y a donc 3 points d'intersection :

$$(-2; 0\ ) \qquad \left(\frac{-1}{3}; \frac{100}{9}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{3}{2}; \frac{21}{2}\right)$$

Méthode n°2 : En développant puis avec une racine évidente

$$(6x+12)\left(x^2 - x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) + 2(x^2 - 3x + 2x - 6) = 0$$

$$(6x+12)\left(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\right) + 2(x^2 - x - 6) = 0$$

$$6x^3 - 9x^2 + 3x + 12x^2 - 18x + 6 + 2x^2 - 2x - 12 = 0$$

$$6x^3 + 5x^2 - 17x - 6 = 0$$

-2 est une racine évidente.

---

factoriser le polynôme, PAR DIVISION :

$$
\begin{array}{cccc|ccc}
6x^3 & +5x^2 & -17x & -6 & x & +2 & \\
\hline
-(6x^3 & +12x\text{^}2\text{`} & & & 6x^2 & -7x & -3 \\
\cline{1-2}
 & -7x^2 & -17x & -6 & & & \\
 & -(-7x^2 & -14x\text{`} & & & & \\
\cline{2-3}
 & & -3x & -6 & & & \\
 & & -(3x & -6) & & & \\
\cline{3-4}
 & & & 0 & & &
\end{array}
$$

On en déduit que, pour tout réel x : $\quad 6x^3 + 5x^2 - 17x - 6 = (x+2)(6x^2 - 7x - 3)$

---

factoriser le polynôme, PAR IDENTIFICATION :

$$6x^3 + 5x^2 - 17x - 6 = (x+2)(ax^2 + bx + c)$$

$$= ax^3 + bx^2 + cx + 2ax^2 + 2bx + 2c$$

$$= ax^3 + (b+2a)x^2 + (c+2b)x + 2c$$

Par unicité de l'écriture d'un polynôme sous forme développée réduite, on obtient :

$$\boldsymbol{6x^3 + 5x^2 - 17x - 6 = ax^3 + (b+2a)x^2 + (c+2b)x + 2c}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{a = 6} \\ \boldsymbol{b + 2a = 5} \\ \boldsymbol{c + 2b = -17} \\ \boldsymbol{2c = -6} \end{cases}$$

On en déduit que $a = 6, b = -7\ et\ c = -3$.

et donc, pour tout réel x : $\quad 6x^3 + 5x^2 - 17x - 6 = (x+2)(6x^2 - 7x - 3)$

... même fin que pour la méthode 1.

Exercice 2.

▶1. On considère les nombres complexes suivants : $z_1 = -1 + i$ et $z_2 = 3 - 4i$.

a) Ecrire sous forme algébrique $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \times z_2$ et $(z_1)^2$.

$z_1 + z_2 = -1 + i + 3 - 4i = 2 - 3i$

$z_1 - z_2 = -1 + i - (3 - 4i) = -1 + i - 3 + 4i = -4 + 5i$

$z_1 \times z_2 = (-1 + i)(3 - 4i) = -3 + 4i + 3i - 4i^2 = -3 + 7i + 4 = 1 + 7i$

$(z_1)^2 = (-1 + i)^2 = (-1)^2 - 2i + i^2 = 1 - 2i - 1 = -2i$

b) Ecrire sous forme algébrique z_1/z_2 .

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-1+i}{3-4i} = \frac{(-1+i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{-3-4i+3i+4i^2}{9-16i^2} = \frac{-3-i-4}{9+16} = \frac{-7-i}{25}$$

▶2. a) Calculer $\left(\sqrt{3} + i\right)^3$.

$$\left(\sqrt{3}+i\right)^3 = \sqrt{3}^3 + 3 \times \sqrt{3}^2 \times i + 3 \times \sqrt{3} \times i^2 + i^3$$

$$\left(\sqrt{3}+i\right)^3 = 3\sqrt{3} + 9i - 3\sqrt{3} - i$$

$$\left(\sqrt{3}+i\right)^3 = 8i$$

b) Le nombre $\left(\sqrt{3} + i\right)^{2022}$ est-il un nombre réel ? *On justifiera sa réponse.*

$$\left(\sqrt{3}+i\right)^{2022} = \left(\sqrt{3}+i\right)^{3\times 674} = \left(\left(\sqrt{3}+i\right)^3\right)^{674} = (8i)^{674} = 8^{674} \times i^{674}$$

$$\left(\sqrt{3}+i\right)^{2022} = 8^{674} \times i^{4\times 168+2}$$

$$\left(\sqrt{3}+i\right)^{2022} = 8^{674} \times (i^4)^{168} \times i^2$$

$$\left(\sqrt{3}+i\right)^{2022} = 8^{674} \times (1)^{168} \times (-1)$$

$$\left(\sqrt{3}+i\right)^{2022} = -8^{674}$$