Terminale Maths Expertes

Fiche d'exercices de préparation au contrôle n°2

Exercice 1.

a) Résoudre $z - i\bar{z} = 0$, on notera $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions.
b) Déterminer $\overline{z - i\bar{z}}$ en fonction de z et $\bar{z}$.

c) Démontrer que le nombre complexe $\dfrac{z + i\bar{z}}{z - i\bar{z}}$ est un imaginaire pur pour tout nombre complexe $z \notin \mathcal{S}$.

Exercice 2.

Préciser, **en justifiant votre réponse**, si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses :

On considère deux nombres complexes z et z' quelconques.

a) Le conjugué de $\dfrac{z}{i}$ est $\dfrac{\bar{z}}{i}$.

b) L'inverse de i est $-i$.

c) Le nombre $(z - i)(\bar{z} + i)$ est un réel.

d) $\mathcal{R}e(z \times z') = \mathcal{R}e(z) \times \mathcal{R}e(z')$.

Exercice 3. Restitution Organisée de Connaissance

Démontrer que le carré du conjugué d'un nombre complexe est égal au conjugué du carré du nombre complexe.

Exercice 4. Restitution Organisée de Connaissance

▶1. Déterminer les entiers relatifs n tels que $2n - 5$ divise $n + 3$.

▶2. Parmi les affirmations suivantes, certaines sont vraies et d'autres fausses. Vous devez démontrer les affirmations vraies et donner un contre-exemple pour les affirmations fausses.
P1. Si a divise b et si c divise d alors $a + c$ divise $b + d$.

P2. Si a divise b alors a divise b^2.

P3. La réciproque de P2 est vraie.

P4. La somme de deux entiers impairs consécutifs est divisible par 4.

Exercice 1.

a) Résoudre $z - i\bar{z} = 0$, on notera $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions.
b) Déterminer $\overline{z - i\bar{z}}$ en fonction de z et $\bar{z}$.
c) Démontrer que le nombre complexe $\dfrac{z + i\bar{z}}{z - i\bar{z}}$ est un imaginaire pur pour tout nombre complexe $z \notin \mathcal{S}$.

Exercice 1.	**a)**	$z - i\bar{z} = (x+iy) - i(x-iy) = 0$ $x + iy - ix + i^2 y = 0$ $x - y + i(y-x) = 0$ on a donc $\begin{cases} x - y = 0 \\ y - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y$ L'ensemble des solutions $\mathcal{S}$ est l'ensemble des nombres complexes $x + iy$ tels que $\boldsymbol{x = y}$.
	b)	$\overline{z - i\bar{z}} = \bar{z} - \overline{i\bar{z}} = \bar{z} - \bar{\imath} \times \bar{\bar{z}} = \bar{z} - (-i) \times z = \bar{z} + iz$
	c)	**Méthode n°1 :** $\dfrac{z + i\bar{z}}{z - i\bar{z}} = \dfrac{(z + i\bar{z}) \times (\bar{z} + iz)}{(z - i\bar{z}) \times (\bar{z} + iz)} = \dfrac{z\bar{z} + iz^2 + i\bar{z}^2 + i^2 z\bar{z}}{z\bar{z} + iz^2 - i\bar{z}^2 - i^2 z\bar{z}} = \dfrac{i(z^2 + \bar{z}^2)}{2z\bar{z} + i(z^2 - \bar{z}^2)}$ or $\overline{z^2} = \bar{z}^2$ donc $z^2 + \bar{z}^2 = z^2 + \overline{z^2} = Z + \bar{Z} \in \mathbb{R}$ et $z^2 - \bar{z}^2 = z^2 - \overline{z^2} = Z - \bar{Z}$ est un imaginaire pur et donc $i(z^2 - \bar{z}^2) \in \mathbb{R}$ par conséquent $2z\bar{z} + i(z^2 - \bar{z}^2) \in \mathbb{R}$ On en déduit que $\dfrac{i(z^2 + \bar{z}^2)}{2z\bar{z} + i(z^2 - \bar{z}^2)}$ est un imaginaire pur. **Méthode n°2 :** $\dfrac{z + i\bar{z}}{z - i\bar{z}} = \dfrac{x + iy + i(x - iy)}{x + iy - i(x - iy)} = \dfrac{x + iy + ix - i^2 y}{x + iy - ix + i^2 y} = \dfrac{x + y + i(y + x)}{x - y + i(y - x)}$ $\dfrac{z + i\bar{z}}{z - i\bar{z}} = \dfrac{[(x+y) + i(y+x)] \times [(x-y) - i(y-x)]}{[(x-y) + i(y-x)] \times [(x-y) - i(y-x)]}$ $= \dfrac{(x+y)(x-y) - (x+y)i(y-x) + i(y+x)(x-y) - i^2(y+x)(y-x)}{(x-y)^2 - i^2(y-x)^2}$ $\dfrac{z + i\bar{z}}{z - i\bar{z}} = \dfrac{-(x+y)(y-x) + 2i(x+y)(x-y) + (y+x)(y-x)}{(x-y)^2 + (y-x)^2}$ $\dfrac{z + i\bar{z}}{z - i\bar{z}} = \dfrac{2i(x+y)(x-y)}{2(x-y)^2} = \dfrac{i(x+y)}{x-y}$ est un imaginaire pur

Exercice 2.

Préciser, **en justifiant votre réponse**, si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses :
On considère deux nombres complexes z et z' quelconques.

a) Le conjugué de $\frac{z}{i}$ est $\frac{\bar{z}}{i}$.
b) L'inverse de i est $-i$.
c) Le nombre $(z-i)(\bar{z}+i)$ est un réel.
d) $\mathcal{Re}(z \times z') = \mathcal{Re}(z) \times \mathcal{Re}(z')$.

Exercice 3.	**a)**	Le conjugué de $\frac{z}{i}$ est $\overline{\left(\frac{z}{i}\right)}$ or $\forall z, z' \in \mathbb{C},\ \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\overline{z'}}$ donc $\overline{\left(\frac{z}{i}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{i}} = \frac{\bar{z}}{-i} = -\frac{\bar{z}}{i}$ L'affirmation a) est donc fausse.
	b)	L'inverse de i est $\frac{1}{i}$: $\frac{1}{i} = \frac{1 \times i}{i \times i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i$ L'affirmation b) est donc vraie.
	c)	**Méthode n°1 :** $\forall z \in \mathbb{C},\ (z-i)(\bar{z}+i) = z\bar{z} + iz - i\bar{z} - i^2$ $(z-i)(\bar{z}+i) = z\bar{z} + i(z-\bar{z}) + 1$ On sait que : • $z\bar{z}$ est réel, pour tout complexe z • $z - \bar{z} = 2i\mathcal{Im}(z)$ est un imaginaire pur, donc $i(z-\bar{z})$ sera un réel • 1 est un réel donc $z\bar{z} + i(z-\bar{z}) + 1 = (z-i)(\bar{z}+i)$ est un réel L'affirmation c) est donc vraie. **Méthode n°2 :** $\forall z \in \mathbb{C},\ (z-i)(\bar{z}+i) = (x+iy-i)(x-iy+i)$ $(z-i)(\bar{z}+i) = x^2 - ixy + ix + iyx - i^2y^2 + i^2y - ix + i^2y - i^2$ $(z-i)(\bar{z}+i) = x^2 + y^2 - 2y + 1$ L'affirmation c) est donc vraie.
		$\forall z, z' \in \mathbb{C}\ \ z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ où $x, y, x', y' \in \mathbb{R}$ $\mathcal{Re}(z \times z') = \mathcal{Re}\big((x+iy)(x'+iy')\big)$ $\mathcal{Re}(z \times z') = \mathcal{Re}(xx' + ixy' + iyx' + i^2yy')$ $\mathcal{Re}(z \times z') = \mathcal{Re}(xx' + ixy' + iyx' - yy')$ $\mathcal{Re}(z \times z') = xx' - yy'$ $\mathcal{Re}(z) \times \mathcal{Re}(z') = \mathcal{Re}(x+iy) \times \mathcal{Re}(x'+iy')$ $\mathcal{Re}(z) \times \mathcal{Re}(z') = xx'$ L'affirmation d) est donc fausse dès que $yy' \neq 0$ Contre-exemple : $z = 1 + i$ et $z' = 2 - i$ $\mathcal{Re}(z \times z') = \mathcal{Re}\big((1+i) \times (2-i)\big) = \mathcal{Re}(2 - i + 2i - i^2) = \mathcal{Re}(3+i) = 3$ $\mathcal{Re}(z) \times \mathcal{Re}(z') = \mathcal{Re}(1+i) \times \mathcal{Re}(2-i) = 1 \times 2 = 2 \neq \mathcal{Re}(z \times z')$

Exercice 3. **Restitution Organisée de Connaissance**

Démontrer que le carré du conjugué d'un nombre complexe est égal au conjugué du carré du nombre complexe.

<table>
<tr><td>Exercice 3.</td><td>

$\forall z \in \mathbb{C}, z = x + iy$ alors $\bar{z} = x - iy$

$\bar{z}^2 = (x - iy)^2 = x^2 - 2ixy + i^2y^2$
$\bar{z}^2 = x^2 - 2ixy - y^2 = x^2 - y^2 - 2ixy$

$\overline{z^2} = \overline{(x + iy)^2} = \overline{x^2 + 2ixy + i^2y^2}$
$\overline{z^2} = \overline{x^2 + 2ixy - y^2} = \overline{x^2 - y^2 + 2ixy}$
$\overline{z^2} = x^2 - y^2 - 2ixy$
donc $\overline{z^2} = \bar{z}^2$

</td></tr>
</table>

Exercice 4.

▶1. Déterminer les entiers naturels n tels que $2n - 5$ divise $n + 3$.

▶2. Parmi les affirmations suivantes, certaines sont vraies et d'autres fausses. Vous devez démontrer les affirmations vraies et donner un contre-exemple pour les affirmations fausses.
P1. Si a divise b et si c divise d alors $a + c$ divise $b + d$.

P2. Si a divise b alors a divise b^2.

P3. La réciproque de P2 est vraie.

P4. La somme de deux entiers impairs consécutifs est divisible par 4.

<table>
<tr><td rowspan="5">Exercice 4.</td><td>1.</td><td>
$2n - 5$ divise $n + 3$ et $2n - 5$ divise $2n - 5$ donc $2n - 5$ divise
$$(2n - 5) - 2(n + 3) = 2n - 5 - 2n - 6 = -11$$
Les diviseurs de -11 sont $\{1; -1; 11; -11\}$.
<table>
<tr><td>$2n - 5 = 1$
$2n = 6$
$n = 3$</td><td>$2n - 5 = -1$
$2n = 4$
$n = 2$</td><td>$2n - 5 = 11$
$2n = 16$
$n = 8$</td><td>$2n - 5 = -11$
$2n = -6$
$n = -3$</td></tr>
</table>
Les solutions sont $\{2; 3; 8\}$
</td></tr>
<tr><td rowspan="4">2.</td><td>Posons $a = 2$ et $b = 4$ donc a divise b
posons aussi $c = 3$ et $d = 9$ donc c divise d
mais $a + c = 5$ ne divise pas $b + d = 13$
La proposition P1 est donc fausse.</td></tr>
<tr><td>Supposons que a divise b alors $b = ka$ où $k \in \mathbb{Z}$
alors $b^2 = k^2a^2$ est divisible par a
La proposition P2 est donc vraie.</td></tr>
<tr><td>Posons $a = 9$ et $b = 3$ donc a divise b^2
mais a ne divise pas b
La proposition P3 est donc fausse.</td></tr>
<tr><td>Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$(2n + 1) + (2n + 3) = 2n + 1 + 2n + 3 = 4n + 4 = 4(n + 1)$ est divisible par 4.
La proposition P4 est donc vraie.</td></tr>
</table>