Terminale Maths Expertes
Fiche d'exercices de préparation au contrôle n°3

Exercice 1.

▶1. Si on divise un entier naturel n par 97, le reste est 2 mais si on divise ce nombre par 91, le quotient augmente de 1 et le reste est 1. Quel est cet entier naturel n ?

▶2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7.

▶3. Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie ou un contre-exemple. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

($\boldsymbol{\mathcal{P}_1}$) : a et b sont deux entiers naturels.

On note q et r le quotient et le reste dans la division euclidienne de a par b : « le reste dans la division euclidienne de $3a$ par b est $3r$ ».

($\boldsymbol{\mathcal{P}_2}$) : Si p est impair alors p^2 est impair.

($\boldsymbol{\mathcal{P}_3}$) est la réciproque ($\mathcal{P}_2$).

Exercice 2.

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie ou un contre-exemple. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

Proposition 1 : a et b sont deux entiers naturels. On note q et r le quotient et le reste dans la division euclidienne de a par b : « le reste dans la division euclidienne de $2a$ par b est $2r$ ».

Proposition 2 : « pour tout entier naturel n, 3 divise le nombre $2^{2n} - 1$ ».

Proposition 3 : « Si un entier relatif x est solution de l'équation $x^2 + x \equiv 0$ [modulo 6]) alors $x \equiv 0$ [modulo 3] ».

Proposition 4 : x et y sont deux entiers relatifs : « si 7 divise $x^2 + y^2$ alors 7 divise x et 7 divise y »

Proposition 5 : «Le chiffre des unités de 13^{13} est 3 ».

Exercice 3.

▶ 1. R.O.C

Soit a, b, c, d des entiers relatifs et n un entier naturel non nul.

Montrer que si $a \equiv b$ [mod n] et $c \equiv d$ [mod n] alors $ac \equiv bd$ [mod n]

▶ 2.a) Déterminer le reste dans la division euclidienne de 2009 par 11.

b) Déterminer le reste dans la division euclidienne de 2^{10} par 11.

c) Déterminer alors le reste dans la division euclidienne de $2^{2009} + 2009$ par 11. *On pourra utiliser les congruences.*

▶ 3. On note p un nombre entier naturel.

On considère, pour tout entier naturel non nul n, $A_n = 2^n + p$.

Soit d un diviseur commun de A_n et A_{n+1}, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, d divise 2^n.

b) En déduire que d divise p.

c) Déterminer le ou les diviseurs communs de $2^{2015} + 17$ et $2^{2016} + 17$.

Exercice 4.

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1.$$

▶ 1. Calculer les six premiers termes de la suite.

▶ 2. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, u_n est pair.

▶ 3. Montrer que, pour tout entier naturel n pair non nul, u_n est divisible par 4.

Exercice 5.

▶ 1. a) Compléter $3^3 \equiv \cdots\ [13]$.

b) Déduisez-en, pour tout entier naturel n, le reste de la division euclidienne de 3^{3n} par 13.

c) Démontrez que pour tout entier naturel n, $3^{6n+2} + 3^{3n+1} + 1$ est un multiple de 13.

▶ 2. On considère l'entier $N = 11^{2017}$.

Déterminer, en justifiant, le reste de la division euclidienne de N par 7.

Terminale Maths Expertes
Fiche d'exercices de préparation au contrôle n°3

Exercice 1.

▶1. Si on divise un entier naturel n par 97, le reste est 2 mais si on divise ce nombre par 91, le quotient augmente de 1 et le reste est 1. Quel est cet entier naturel n ?

▶2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7.

▶3. Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie ou un contre-exemple. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

$(\boldsymbol{\mathcal{P}_1})$ **:** a et b sont deux entiers naturels.

On note q et r le quotient et le reste dans la division euclidienne de a par b : « le reste dans la division euclidienne de $3a$ par b est $3r$ ».

$(\boldsymbol{\mathcal{P}_2})$ **:** Si p est impair alors p^2 est impair.

$(\boldsymbol{\mathcal{P}_3})$ est la réciproque $(\mathcal{P}_2)$.

Exercice 1.	**1.**	$n = 97 \times q + 2 = 91 \times (q+1) + 1$ $97q + 2 = 91q + 91 + 1$ $97q - 91q = 92 - 2$ $6q = 90$ $q = \frac{90}{6} = 15$ On en déduit que le nombre $n = 97 \times q + 2 = 1457$.
	2.	**Méthode n°1 :** **Démontrons par récurrence que $\boldsymbol{\mathcal{P}(n)}$ « $\boldsymbol{3^{2n} - 2^n}$ est divisible par 7 » est vraie pour tout $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$.** Initialisation pour $n = 0$: $3^{2\times 0} - 2^0 = 1 - 1 = 0$ est divisible par 7 donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie. Hérédité : On suppose que $\mathcal{P}(n)$: « $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7 » est vraie pour $n \in \mathbb{N}$ fixé $3^{2(n+1)} - 2^{n+1} = 3^{2n+2} - 2^{n+1} = 3^{2n} \times 3^2 - 2^{n+1} = 9 \times 3^{2n} - 2^{n+1}$ or, puisque $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7 $3^{2n} - 2^n \equiv 0$ [mod 7] $\Leftrightarrow\ 3^{2n} \equiv 2^n$ [mod 7]

		$\Leftrightarrow\ 9 \times 3^{2n} \equiv 9 \times 2^{n}\ [\text{mod } 7]$ $\Leftrightarrow\ 9 \times 3^{2n} - 2^{n+1} \equiv 9 \times 2^{n} - 2^{n+1}\ [\text{mod } 7]$ $\Leftrightarrow\ 3^{2(n+1)} - 2^{n+1} \equiv 2^{n} \times (9-2)\ [\text{mod } 7]$ $\Leftrightarrow\ 3^{2(n+1)} - 2^{n+1} \equiv 2^{n} \times 7\ [\text{mod } 7] \equiv 0\ [\text{mod } 7]$ donc $3^{2(n+1)} - 2^{n+1}$ est divisible par 7 donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie Par conséquent $3^{2n} - 2^{n}$ est divisible par 7, pour tout $n \in \mathbb{N}$. **Méthode n°2 :** **(Démonstration directe sans récurrence)** Soit $n \in \mathbb{N}$, $3^{2n} - 2^{n} = (3^{2})^{n} - 2^{n} = 9^{n} - 2^{n}$ $9 \equiv 2\ [\text{mod } 7]$ $9^{n} \equiv 2^{n}\ [\text{mod } 7]$ Par conséquent $3^{2n} - 2^{n}$ est divisible par 7, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
	3. $(\boldsymbol{\mathcal{P}}_1)$	$a = bq + r$ où $0 \leq r < b$ donc $3a = b \times 3q + 3r$ mais a-t-on $0 \leq 3r < b$? La proposition $(\mathcal{P}_1)$ est fausse et pour construire un contre-exemple, il suffit de trouver un cas où $3r \geq b$ Par exemple, prenons $a = 2 \times 5 + 1 = 11$ et $b = 2$ $3a = 33 = 2 \times 16 + 1$. Le reste est 1 et non pas 3 !
	3. $(\boldsymbol{\mathcal{P}}_2)$	Supposons que p est impair alors $p = 2k + 1$ où $k \in \mathbb{Z}$ $p^{2} = (2k+1)^{2} = 4k^{2} + 4k + 1 = 2(2k^{2} + 2k) + 1$ donc p^{2} est un nombre impair. La proposition $(\mathcal{P}_2)$ est vraie. Méthode n°2 : Supposons que $p \equiv 1\ [\text{mod } 2]$ donc $p^{2} \equiv 1\ [\text{mod } 2]$ La proposition $(\mathcal{P}_2)$ est vraie
	3. $(\boldsymbol{\mathcal{P}}_3)$	Supposons que p^{2} est impair et démontrons, **par l'absurde**, que p est impair. Nous supposons alors que p est pair alors $p = 2k$ où $k \in \mathbb{Z}$ $p^{2} = (2k)^{2} = 4k^{2} = 2(2k^{2})$ donc p^{2} est un nombre pair, ce qui est exclu puisque nous avons supposé que p^{2} est impair. Par conséquent, p ne peut pas être un nombre pair et donc p est impair. Nous avons démontré que : Si p^{2} est impair alors p est impair ce qui est la réciproque de la proposition $(\mathcal{P}_2)$. La proposition $(\mathcal{P}_3)$ est donc vraie.

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>
Méthode n°2 :
Supposons que $p^2 \equiv 0 \;\; [\text{mod } 2]$
<table>
<tr><td>$p \equiv \cdots \; [\text{mod } 2]$</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>$p^2 \equiv \cdots \; [\text{mod } 2]$</td><td>0</td><td>1</td></tr>
</table>
On en déduit que $p \equiv 0 \;\; [\text{mod } 2]$
La proposition $(\mathcal{P}_3)$ est donc vraie.
</td>
</tr>
</table>

Exercice 2.

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie ou un contre-exemple. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

Proposition 1 : a et b sont deux entiers naturels. On note q et r le quotient et le reste dans la division euclidienne de a par b : « le reste dans la division euclidienne de $2a$ par b est $2r$ ».

Proposition 2 : « pour tout entier naturel n, 3 divise le nombre $2^{2n} - 1$ ».

Proposition 3 : « Si un entier relatif x est solution de l'équation $x^2 + x \equiv 0$ [modulo 6]) alors $x \equiv 0$ [modulo 3] ».

Proposition 4 : x et y sont deux entiers relatifs : « si 7 divise $x^2 + y^2$ alors 7 divise x et 7 divise y »

Proposition 5 : «Le chiffre des unités de 13^{13} est 3 ».

Exercice 2.	**P1**	**La proposition P1 est fausse.** Prenons comme contre-exemple : $a = 29$ et $b = 6$ On a $a = 29 = 6 \times 4 + 5$ donc $q = 4$ et $r = 5$ Mais $2a = 58 = 6 \times 9 + 4$ Car $2r = 10 \geq b = 6$ donc 10 ne peut pas être un reste dans la division euclidienne par 6.
	P2	**La proposition P2 est vraie.** $2^2 = 4 \equiv 1 \; [\text{mod } 3]$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad (2^2)^n \equiv 1^n \; [\text{mod } 3]$ $2^{2n} \equiv 1 \; [\text{mod } 3]$ et donc $2^{2n} - 1 \equiv 0 \; [\text{mod } 3]$ Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, 3 divise $2^{2n} - 1$.

P3

La proposition P3 est fausse.

Soit x un entier relatif tel que

$$x^2 + x \equiv 0 \text{ [mod 6]}$$

En utilisant une table de congruence :

$x \equiv \cdots$ [mod 6]	0	1	2	3	4	5
$x^2 \equiv \cdots$ [mod 6]	0	1	4	3	4	1
$x^2 + x \equiv \cdots$ [mod 6]	0	2	0	0	2	0

On en déduit que, puisque $x^2 + x \equiv 0$ [mod 6]

Alors

$x \equiv 0$ [mod 6] ou $x \equiv 2$ [mod 6] ou $x \equiv 3$ [mod 6] ou $x \equiv 5$ [mod 6]

Si $x \equiv 0$ [mod 6] alors $x \equiv 0$ [mod 3] (x est divisible par 6 donc aussi par 3). Cela de nous donne pas de contre-exemple.

Si $x \equiv 3$ [mod 6] alors $x \equiv 0$ [mod 3] (dans la division euclidienne de x par 6, le reste est 3 donc x est divisible par 3). Cela de nous donne pas de contre-exemple.

Par contre : Si $x \equiv 2$ [mod 6] ou $x \equiv 5$ [mod 6] peuvent nous donner un contre-exemple.

Cherchons une valeur de x non divisible par 3, telle que $x \equiv 2$ [mod 6]

$$x - 2 = 6 \times k \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

Tout simplement, $k = 0$ donc $x = 2$ est un contre-exemple :

$$x = 2 \equiv 2 \text{ [mod 3]} \not\equiv 0 \text{ [mod 3]}$$

Mais $x \equiv 2$ [mod 6]

donc $x^2 \equiv 4$ [mod 6]

et $x^2 + x \equiv 6$ [mod 6] $\equiv 0$ [mod 6]

P4

La proposition P4 est vraie.

Par disjonction des cas , en utilisant une table de congruence :

$x \equiv \cdots$ [mod 7]	0	1	2	3	4	5	6
$x^2 \equiv \cdots$ [mod 7]	0	1	4	2	2	4	1

[mod 7]	x	0	1	2	3	4	5	6
y	y^2 x^2	0	1	4	2	2	4	1
0	0	0	1	4	2	2	4	1
1	1	1	2	5	3	3	5	2
2	4	4	5	1	6	6	1	5
3	2	2	3	6	4	4	6	3
4	2	2	3	6	4	4	6	3
5	4	4	5	1	6	6	1	5
6	1	1	2	5	3	3	5	2

$$\underbrace{\hspace{10cm}}_{x^2+y^2}$$

Le seul cas possible, pour que $x^2 + y^2 \equiv 0$ [mod 7] est que $x \equiv 0$ [mod 7] et $y \equiv 0$ [mod 7].

P5

La proposition P5 est vraie.

Pour trouver le chiffre des unités, il faut raisonner modulo 10.

$$13 \equiv 3 \text{ [mod 10]}$$
$$13^2 \equiv 9 \text{ [mod 10]} \equiv -1 \text{ [mod 10]}$$
$$(13^2)^6 \equiv (-1)^6 \text{ [mod 10]}$$
$$13^{12} \equiv 1 \text{ [mod 10]}$$
$$13^{13} \equiv 13 \text{ [mod 10]} \equiv 3 \text{ [mod 10]}$$

Le chiffre des unités de 13^{13} est donc bien le chiffre 3.

Exercice 3.

▶ 1. R.O.C

Soit a, b, c, d des entiers relatifs et n un entier naturel non nul.

Montrer que si $a \equiv b$ [mod n] et $c \equiv d$ [mod n] alors $ac \equiv bd$ [mod n]

▶ 2.a) Déterminer le reste dans la division euclidienne de 2009 par 11.

b) Déterminer le reste dans la division euclidienne de 2^{10} par 11.

c) Déterminer alors le reste dans la division euclidienne de $2^{2009} + 2009$ par 11. *On pourra utiliser les congruences.*

▶ 3. On note p un nombre entier naturel.

On considère, pour tout entier naturel non nul n, $A_n = 2^n + p$.

Soit d un diviseur commun de A_n et A_{n+1}, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, d divise 2^n.

b) En déduire que d divise p.

c) Déterminer le ou les diviseurs communs de $2^{2015}+17$ et $2^{2016}+17$.

Exercice 3.	**1.**	On suppose que $a \equiv b$ [mod n] et que $c \equiv d$ [mod n] Par définition : n divise $b-a$ donc $b-a=k\times n$ où $k\in\mathbb{Z}$ donc $b=a+kn$ n divise $d-c$ donc $d-c=k'\times n$ où $k'\in\mathbb{Z}$ donc $d=c+k'n$ Calculons $bd-ac=(a+kn)(c+k'n)-ac=ac+ak'n+knc+kk'n^2-ac$ $=ak'n+knc+kk'n^2=n\times(ak'+kc+kk'n)$ où $ak'+kc+kk'n\in\mathbb{Z}$ donc n divise $bd-ac$ et donc $ac\equiv bd$ [mod n]
	2.	$2009=11\times182+7$ où $0\leq7<11$ Donc le reste de la division euclidienne de 2009 par 11 est 7.
		$2^{10}=11\times93+1$ où $0\leq1<11$ Donc le reste de la division euclidienne de 2^{10} par 11 est 1.
		$2^{10}\equiv1$ [mod 11] $(2^{10})^{200}\equiv1^{200}$ [mod 11] $2^{2000}\equiv1$ [mod 11] $2^{2000}\times2^9\equiv2^9$ [mod 11] $2^{2009}\equiv6$ [mod 11] Or $2009\equiv7$ [mod 11] d'après la question 2a) Donc $2^{2009}+2009\equiv6+7$ [mod 11] $\equiv13$ [mod 11] $\equiv2$ [mod 11]
	3.	Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, d divise $A_n=2^n+p$ et d divise $A_{n+1}=2^{n+1}+p$ donc d divise $A_{n+1}-A_n=2^{n+1}+p-(2^n+p)=2^{n+1}+p-2^n-p=2^{n+1}-2^n$ $=2^n(2-1)=2^n$
		Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, d divise $A_n=2^n+p$ et d divise 2^n donc d divise $A_n-2^n=2^n+p-2^n=p$

		En prenant $n = 2015$ et $p = 17$ Notons d un diviseur commun de A_{2015} et A_{2016}. D'après les questions précédentes, d divise alors 2^{2015} et 17. or, les diviseurs positifs de 17 sont 1 et 17. donc $d = 1$ ou $d = 17$. 1 divise bien 2^{2015}, mais 17 divise-t-il 2^{2015} ? $2^4 = 16 \equiv -1\ [\text{mod } 17]$ $(2^4)^{503} \equiv (-1)^{503}\ [\text{mod } 17]$ $2^{2012} \equiv -1\ [\text{mod } 17]$ $2^{2012} \times 2^3 \equiv -1 \times 2^3\ [\text{mod } 17]$ $2^{2015} \equiv -8\ [\text{mod } 17] \equiv 9\ [\text{mod } 17] \not\equiv 0\ [\text{mod } 17]$ Donc 17 ne divise pas 2^{2015} et donc 17 n'est pas un diviseur commun.

Exercice 4.

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1.$$

▶1. Calculer les six premiers termes de la suite.

▶2. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, u_n est pair.

▶3. Montrer que, pour tout entier naturel n pair non nul, u_n est divisible par 4.

Exercice 4.	**1.**	$u_1 = 2^1 + 3^1 + 6^1 - 1 = 10$ $u_2 = 2^2 + 3^2 + 6^2 - 1 = 4 + 9 + 36 - 1 = 48$ $u_3 = 2^3 + 3^3 + 6^3 - 1 = 8 + 27 + 216 - 1 = 250$ $u_4 = 2^4 + 3^4 + 6^4 - 1 = 16 + 81 + 1\ 296 - 1 = 1\ 392$ $u_5 = 2^5 + 3^5 + 6^5 - 1 = 32 + 243 + 7\ 776 - 1 = 8\ 050$ $u_6 = 2^6 + 3^6 + 6^6 - 1 = 64 + 729 + 46\ 656 - 1 = 47\ 448$
	2.	$2 \equiv 6 \equiv 0\ [mod\ 2]$ et $3 \equiv 1\ [mod\ 2]$ Alors, pour tout entier naturel n non nul, $2^n \equiv 6^n \equiv 0\ [mod\ 2]$ et $3^n \equiv 1\ [mod\ 2]$ Par conséquent, pour tout entier naturel n non nul, $u_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1 \equiv 0 + 1 + 0 - 1 \equiv 0\ [mod\ 2]$ Pour tout entier naturel n non nul, u_n est donc pair.
	3.	pour tout entier naturel k non nul, posons $n = 2k$, alors $u_{2k} = 2^{2k} + 3^{2k} + 6^{2k} - 1 = 4^k + 9^k + 36^k - 1$ $4 \equiv 36 = 4 \times 9 \equiv 0\ [mod\ 4]$ et $9 = 4 \times 2 + 1 \equiv 1\ [mod\ 4]$ alors, pour tout entier naturel k non nul, $4^k \equiv 36^k \equiv 0\ [mod\ 4]$ et $9^k \equiv 1\ [mod\ 4]$ Par conséquent, pour tout entier naturel k non nul, $u_{2k} = 4^k + 9^k + 36^k - 1 \equiv 0 + 1 + 0 - 1 \equiv 0\ [mod\ 4]$ Pour tout entier naturel n pair non nul, u_n est donc divisible par 4.

Exercice 5.

▶1. a) Compléter $3^3 \equiv \cdots\ [13]$.

b) Déduisez-en, pour tout entier naturel n, le reste de la division euclidienne de 3^{3n} par 13.

c) Démontrez que pour tout entier naturel n, $3^{6n+2}+3^{3n+1}+1$ est un multiple de 13.

▶2. On considère l'entier $N = 11^{2017}$.

Déterminer, en justifiant, le reste de la division euclidienne de N par 7.

Exercice 5.	**1a**	$3^3 = 27 = 13 \times 2 + 1 \equiv 1\ [13]$
	1b	Pour tout entier naturel n, $3^{3n} = (3^3)^n \equiv 1\ [13]$, le reste de la division euclidienne de 3^{3n} par 13 est donc 1.
	1c	Pour tout entier naturel n, $3^{3n} \equiv 1\ [13]$ donc $(3^{3n})^2 = 3^{6n} \equiv 1\ [13]$ et donc $3^{6n+2} \equiv 9\ [13]$ d'autres parts, $3^{3n} \equiv 1\ [13]$ donc $3^{3n+1} \equiv 3\ [13]$ et donc $3^{6n+2}+3^{3n+1}+1 \equiv 9+3+1\ [13]$ $\equiv 13\ [13] \equiv 0\ [13]$ Pour tout entier naturel n, $3^{6n+2}+3^{3n+1}+1$ est donc un multiple de 13.
	2.	$11 \equiv 4\ [7]$ $11^2 = 121 = 17 \times 7 + 2 \equiv 2\ [7]$ $11^3 = 11^2 \times 11 \equiv 2 \times 11\ [7] \equiv 22 = 3 \times 7 + 1 \equiv 1\ [7]$ $(11^3)^{672} = 11^{2016} \equiv 1\ [7]$ Par conséquent, $11^{2017} = 11^{2016} \times 11 \equiv 1 \times 11\ [7] \equiv 11\ [7] \equiv 4\ [7]$ Le reste de la division euclidienne de $N = 11^{2017}$ par 7 est donc 4.