Terminale Maths Expertes
Fiche d'exercices de préparation au contrôle n°4

Exercice 1.

▶1. Ecrire sous forme trigonométrique le nombre complexe $z_2 = -2 - 2i$.

▶2. Ecrire sous forme trigonométrique $z_3 = 9i$ et $z_4 = -\sqrt{3} + 3i$.

▶3. Ecrire sous forme algébrique le nombre z_5 de module 2 et d'argument $-\frac{\pi}{6}$.

Exercice 2.

On considère le nombre complexe $a = \left(\sqrt{3} - i\right)^{2022}$.

Le nombre complexe a est-il un nombre réel ? On justifiera sa réponse.

Exercice 3. Restitution Organisée de Connaissance

En partant de la définition, démontrer que le carré du module d'un nombre complexe est égal au module du carré du nombre.

Exercice 4.

▶1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$.

▶2. Dans un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives : $z_A = \sqrt{3} + i$ et $z_B = \overline{z_A}$.

a) Ecrire sous forme trigonométrique z_A et z_B.

b) Placer les points A et B dans le repère, on laissera apparent les traits de construction.

c) On appelle C et D les points d'affixes respectives $z_C = i \times z_A$ et $z_D = i \times z_C$.
Mettre z_C et z_D sous forme algébrique puis placer les points C et D dans le repère.

▶3. Démontrer que le triangle ACD est rectangle et isocèle.

Exercice 5.

Partie A. On considère l'équation $z^2 - 2z + 4 = 0$ (E).

▶1. Résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{C}$. Les solutions seront notées z' et z'' où z' désigne la solution ayant la partie imaginaire positive. Donner les solutions sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.

▶2. Donner la valeur exacte de $(z')^{2017}$ sous forme trigonométrique.

Partie B. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

On considère les points les points A d'affixe $z_A = 1 + i\sqrt{3}$, B d'affixe $z_B = \overline{z_A}$ et C d'affixe $z_C = -2$ et on pose $Z = \frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$.

Déterminer la forme algébrique du nombre complexe Z puis sa forme trigonométrique.

Exercice 1.

▶ 1. Ecrire sous forme trigonométrique le nombre complexe $z_2 = -2 - 2i$.

▶ 2. Ecrire sous forme trigonométrique $z_3 = 9i$ et $z_4 = -\sqrt{3} + 3i$.

▶ 3. Ecrire sous forme algébrique le nombre z_5 de module 2 et d'argument $-\frac{\pi}{6}$.

Exercice 1.	**1.**	$\lvert z_2\rvert = \lvert -2-2i\rvert = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ $z_2 = 2\sqrt{2}\left(-\frac{2}{2\sqrt{2}} - \frac{2}{2\sqrt{2}}i\right)$ $z_2 = 2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$ $z_2 = 2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$ $z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-3\pi}{4}\right)\right)$
	2.	$z_3 = 9i = 9\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ $\lvert z_4\rvert = \sqrt{3+9} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ $z_4 = 2\sqrt{3}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} + \frac{3}{2\sqrt{3}}i\right) = 2\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ $z_4 = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$
	3.	$z_5 = 2\left(\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)\right)$ $z_5 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$ $z_5 = \sqrt{3} - i$

Exercice 2.

On considère le nombre complexe $a = \left(\sqrt{3} - i\right)^{2022}$.

Le nombre complexe a est-il un nombre réel ? On justifiera sa réponse.

<table>
<tr><td>Exercice 2.</td><td>

$z = \sqrt{3} - i$

$|z| = |\sqrt{3} - i| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$

$z = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)\right)$

$a = \left(\sqrt{3} - i\right)^{2022} = z^{2022}$

$\arg(a) = \arg(z^{2022}) = 2022 \times \arg(z) = 2022 \times \frac{-\pi}{6}\ [2\pi]$

$\arg(a) = -337\pi\ [2\pi] = \pi\ [2\pi]$

Le nombre a est donc un nombre réel.
</td></tr>
</table>

Exercice 3. Restitution Organisée de Connaissance

En partant de la définition, démontrer que le carré du module d'un nombre complexe est égal au module du carré du nombre.

<table>
<tr><td>Exercice 3.</td><td>

$\forall z \in \mathbb{C}, z = x + iy$

$|z|^2 = |x+iy|^2 = \sqrt{x^2+y^2}^2 = x^2 + y^2$

$|z^2| = |(x+iy)^2| = |x^2 + 2ixy + i^2y^2|$

$|z^2| = |x^2 + 2ixy - y^2|$

$|z^2| = |x^2 - y^2 + 2ixy|$

$|z^2| = \sqrt{(x^2-y^2)^2 + (2xy)^2}$

$|z^2| = \sqrt{x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + 4x^2y^2}$

$|z^2| = \sqrt{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}$

$|z^2| = \sqrt{(x^2+y^2)^2}$

$|z^2| = x^2 + y^2$

donc $|z^2| = |z|^2$
</td></tr>
</table>

Exercice 4.

▶1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$.

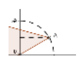
▶2. Dans un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives : $z_A = \sqrt{3} + i$ et $z_B = \overline{z_A}$.

a) Ecrire sous forme trigonométrique z_A et z_B.

b) Placer les points A et B dans le repère, on laissera apparent les traits de construction.

c) On appelle C et D les points d'affixes respectives $z_C = i \times z_A$ et $z_D = i \times z_C$. Mettre z_C et z_D sous forme algébrique puis placer les points C et D dans le repère.

▶3. Démontrer que le triangle ACD est rectangle et isocèle.

Exercice 4.	**1.**	$z^2-2\sqrt{3}z+4=0$ $\Delta=4\times3-4\times4=12-16=-4$ $z_1=\dfrac{2\sqrt{3}-i\sqrt{4}}{2}=\dfrac{2\sqrt{3}-2i}{2}=\sqrt{3}-i$ et $z_2=\sqrt{3}+i$
	2.	$\lvert z_A\rvert=\sqrt{\sqrt{3}^2+1^2}=\sqrt{4}=2$ $z_A=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)=2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$ $z_B=z_A=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i\right)$ $z_B=2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$ $z_C=i\times z_A=i\times\left(\sqrt{3}+i\right)=i\sqrt{3}-1$ $z_D=i\times z_C=i\times\left(i\sqrt{3}-1\right)=-\sqrt{3}-i$ 
	3.	$z_{\overrightarrow{CA}}=z_A-z_C=\sqrt{3}+i-\left(i\sqrt{3}-1\right)=\sqrt{3}+1+i\left(1-\sqrt{3}\right)$ $z_{\overrightarrow{CD}}=z_D-z_C=-\sqrt{3}-i-\left(i\sqrt{3}-1\right)=-\sqrt{3}+1-i\left(1+\sqrt{3}\right)$ $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CD}=\left(\sqrt{3}+1\right)\left(-\sqrt{3}+1\right)-\left(1-\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{3}\right)$ $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CD}=-3+\sqrt{3}-\sqrt{3}+1-(1-3)=-2+2=0$ Le triangle CDA est donc rectangle en C. $CA=\lvert z_{\overrightarrow{CA}}\rvert=\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2+\left(1-\sqrt{3}\right)^2}$ $CA=\sqrt{3+2\sqrt{3}+1+1-2\sqrt{3}+3}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ $CD=\lvert z_{\overrightarrow{CD}}\rvert=\sqrt{\left(-\sqrt{3}+1\right)^2+\left(1+\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ Le triangle CDA est donc rectangle et isocèle en C.

Exercice 5.

Partie A. On considère l'équation $z^2-2z+4=0\ \ (E)$.

▶1. Résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{C}$. Les solutions seront notées z' et z'' où z' désigne la solution ayant la partie imaginaire positive. Donner les solutions sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.

▶2. Donner la valeur exacte de $(z')^{2017}$ sous forme trigonométrique.

Partie B. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

On considère les points les points A d'affixe $z_A = 1 + i\sqrt{3}$, B d'affixe $z_B = \overline{z_A}$ et C d'affixe $z_C = -2$ et on pose $Z = \frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$.
Déterminer la forme algébrique du nombre complexe Z puis sa forme trigonométrique.

Exercice 5.	**A1**	$z^2 - 2z + 4 = 0 \ (E)$ $\Delta = 4 - 4 \times 4 = -12 < 0$ il y a donc deux racines complexes : $z' = \frac{2 + i\sqrt{12}}{2} = \frac{2 + 2i\sqrt{3}}{2} = 1 + i\sqrt{3}$ et $z'' = \overline{z'} = 1 - i\sqrt{3}$ $\lvert z' \rvert = \sqrt{1+3} = 2$ et $z' = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ $z'' = \overline{z'} = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$
	A2	$\lvert (z')^{2017} \rvert = \lvert z' \rvert^{2017} = 2^{2017}$ $\arg((z')^{2017}) = 2017 \times \arg(z') = 2017 \times \frac{\pi}{3}\ [2\pi] = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ $(z')^{2017} = 2^{2017}\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$
	Ba	$Z = \frac{1 + i\sqrt{3} + 2}{1 - i\sqrt{3} + 2} = \frac{3 + i\sqrt{3}}{3 - i\sqrt{3}} = \frac{(3 + i\sqrt{3})^2}{(3 - i\sqrt{3})(3 + i\sqrt{3})} = \frac{9 + 6i\sqrt{3} + 3i^2}{9 - 3i^2}$ $Z = \frac{6 + 6i\sqrt{3}}{12} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$
	Bb	$\lvert Z \rvert = \left\lvert \cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) \right\rvert = 1$ $\arg Z = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$