Terminale Maths Expertes
Fiche d'exercices de préparation au contrôle

Exercice 1.

La consommation de volailles en France, en kg par an et par habitant, est modélisée par le polynôme de degré 2 suivant : $f(x) = ax^2 + bx + c$, où x est le rang de l'année à partir de 1990. En 1996 et en 1999, la consommation s'élevait à 23 kg par an par habitant puis en 2008, elle s'élevait à 19,1 kg par an par habitant soit $f(18) = 19{,}1$.

▶1. a) Traduire les données de l'énoncé par un système d'équations.

b) Ecrire le système sous la forme $A \times X = B$ où les matrices A, B et X sont à préciser.

c) En résolvant le système à l'aide de la calculatrice, déterminer l'expression de la fonction f.

▶2. Faire une prévision de la consommation de volailles en kg par an et par habitant en 2016.

Exercice 1

1.

$f(18) = 19{,}1 \quad f(6) = 23 \quad$ et $\quad f(9) = 23$ donc

$$\begin{cases} f(6) = 23 = 36a + 6b + c \\ f(9) = 23 = 81a + 9b + c \\ f(18) = 19{,}1 = 324a + 18b + c \end{cases}$$

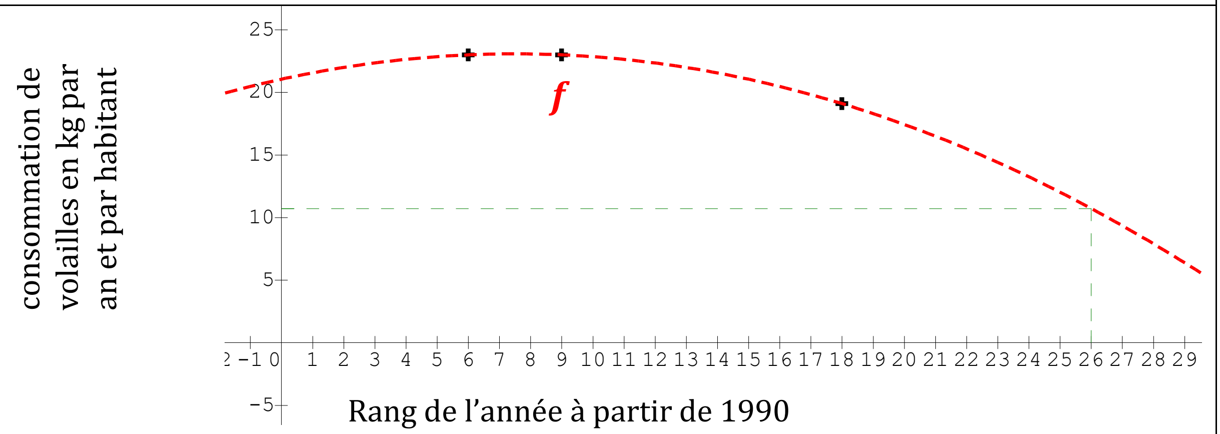
$$A \times X = B = \begin{pmatrix} 36 & 6 & 1 \\ 81 & 9 & 1 \\ 324 & 18 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ 23 \\ 19{,}1 \end{pmatrix}$$

La matrice A est inversible donc

$$X = A^{-1} \times B = \begin{pmatrix} -\dfrac{13}{360} \\ \dfrac{13}{24} \\ \dfrac{421}{20} \end{pmatrix}$$

On en déduit que $f(x) = -\dfrac{13}{360}x^2 + \dfrac{13}{24}x + \dfrac{421}{20}$.

2.



Selon ce modèle, on peut prévoir que la consommation en 2016 sera de $f(26) = -\frac{13}{360} \times 26^2 + \frac{13}{24} \times 26 + \frac{421}{20} \approx 10{,}72$ kg par an par habitant.

Exercice 2.

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

▶1. Calculer A^2.
▶2. Déterminer pour quelle valeur de α, on a $A^2 = 3A - 2I_3$.
▶3. En déduire que la matrice A est inversible et préciser sa matrice inverse.

<table>
<tr><td rowspan="4">Exercice 2.</td><td>1.</td><td>$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3-\alpha \\ -9 & 10 & -9-3\alpha \\ -3-\alpha & 3+\alpha & -2+\alpha^2 \end{pmatrix}$</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>$3A - 2I_3 = 3\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & \alpha \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$</td></tr>
<tr><td></td><td>$3A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -9 & 12 & -9 \\ -3 & 3 & 3\alpha \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
$3A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -9 & 10 & -9 \\ -3 & 3 & 3\alpha-2 \end{pmatrix} = A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3-\alpha \\ -9 & 10 & -9-3\alpha \\ -3-\alpha & 3+\alpha & -2+\alpha^2 \end{pmatrix}$
On a alors $\begin{cases} -3-\alpha = -3 \\ -9-3\alpha = -9 \\ 3+\alpha = 3 \\ -2+\alpha^2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = 0$</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>Pour $\alpha = 0$, on a alors $A^2 = 3A - 2I_3$
$A^2 - 3A = -2I_3$
$-\frac{1}{2}(A^2 - 3A) = I_3$
$-\frac{1}{2}(A - 3I_3) \times A = I_3$
On en déduit que A est inversible et $A^{-1} = -\frac{1}{2}(A - 3I_3) = \frac{3}{2}I_3 - \frac{1}{2}A$</td></tr>
</table>

Exercice 3.

▶1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.
a) La matrice A est-elle inversible ? Justifier votre réponse.
b) Donner l'inverse de la matrice A.
▶2. Pour se rendre à son travail, une personne emprunte une route qui monte sur x km, puis descend sur y km. Sa vitesse moyenne en montée est de 60 km.h^{-1}, et en descente de 90 km.h^{-1}. Elle met alors 12 minutes pour arriver sur son lieu de travail, et 13 minutes le soir pour rentrer chez elle.
a) Traduire les données de l'énoncé par un système d'équations.
b) Ecrire le système sous la forme $A \times X = B$ où les matrices B et X sont à préciser.
c) En déduire la distance entre le domicile et le lieu de travail de cette personne.

Exercice 3.	1.	La matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ est inversible car le déterminant $3 \times 3 - 2 \times 2 = 5 \neq 0$.
		L'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ est alors $A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & -2/5 \\ -2/5 & 3/5 \end{pmatrix}$
	2.	A l'aller, la personne monte x km à 60 km.h^{-1}, le temps mis pour la montée sera alors de x minutes, puis elle descend y km à 90 km.h^{-1}, le temps mis pour la descente sera alors de $\frac{60y}{90} = \frac{2}{3}y$ minutes. On obtient alors pour le temps total, à l'aller, $x + \frac{2}{3}y = 12 \Leftrightarrow 3x + 2y = 36$. Avec le même raisonnement, pour le retour, on obtient alors, $y + \frac{2}{3}x = 13 \Leftrightarrow 2x + 3y = 39$ d'où le système : $\begin{cases} 3x + 2y = 36 \\ 2x + 3y = 39 \end{cases}$
		On a alors : $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ 39 \end{pmatrix}$ c'est-à-dire $A \times X = B$ où $B = \begin{pmatrix} 36 \\ 39 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
		D'après la question 1, la matrice A est inversible donc $A^{-1}AX = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 3/5 & -2/5 \\ -2/5 & 3/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 36 \\ 39 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$ On en déduit que $x = 6$ et $y = 9$ et donc que la distance entre le domicile et le lieu de travail de cette personne est de 15 km.

Exercice 4.

▶1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

a) Vérifier que $A^2 = A + 2I_2$.

b) En déduire une expression de A^3 et une expression de A^4 sous la forme $\alpha A + \beta I_2$ où α et β sont des réels à déterminer.

c) Déterminer toutes les matrices de la forme $B = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & c \end{pmatrix}$ telles que $B^2 = A^2$.

▶2. Soit la matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

a) Calculer C^2, C^3 et C^4.

b) Démontrer, par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, $C^n = \begin{pmatrix} 1 & n & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ où

$\begin{cases} u_{n+1} = 1 + n + u_n \ \forall n \in \mathbb{N}^* \\ u_1 = 1 \end{cases}$.

▶3. Déterminer toutes les matrices carrées, de dimensions 2, D telles que $D^2 = I_2$.

Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Exercice 4.	**1.**	$A^2 = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$ $A + 2I_2 = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} + 2 \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$ On a donc $A^2 = A + 2I_2$
		$A^3 = A \times A^2 = A \times (A + 2I_2) = A^2 + 2A = A + 2I_2 + 2A = 3A + 2I_2$ $A^4 = A \times A^3 = A \times (3A + 2I_2) = 3A^2 + 2A = 3(A + 2I_2) + 2A$ $= 3A + 6I_2 + 2A = 5A + 6I_2$
		$B = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & c \end{pmatrix}$ $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab & ac \\ bc & ab + c^2 \end{pmatrix} = A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} ab = -2 \\ ac = 6 \\ bc = -3 \\ ab + c^2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = -2 \\ ac = 6 \\ bc = -3 \\ -2 + c^2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = -2 \\ ac = 6 \\ bc = -3 \\ c^2 = 9 \end{cases}$ Si $c = 3$ alors $\begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ Si $c = -3$ alors $\begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \end{cases}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$
	2.	$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $C^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $C^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

		Démontrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie « $C^n = \begin{pmatrix} 1 & n & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ », pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Initialisation pour $n = 1$: $$\begin{pmatrix} 1 & n & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & u_1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = C = C^1$$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie. Hérédité : On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie : $C^n = \begin{pmatrix} 1 & n & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour $n \in \mathbb{N}$ fixé $$C^{n+1} = C \times C^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & n & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 & u_n + n + 1 \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ $$= \begin{pmatrix} 1 & n+1 & u_{n+1} \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie Par conséquent $C^n = \begin{pmatrix} 1 & n & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

	3.	Déterminer toutes les matrices carrées, de dimensions 2, D telles que $D^2 = I_2$. $D = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $D^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+dc & bc+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & (a+d)b \\ (a+d)c & bc+d^2 \end{pmatrix}$ $D^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & (a+d)b \\ (a+d)c & bc+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} a^2+bc=1 \\ (a+d)b=0 \\ (a+d)c=0 \\ bc+d^2=1 \end{cases}$ **Cas n°1 :** Si $a+d=0$ alors $a=-d$ soit $a^2=d^2$ donc $a^2+bc=1$ Et alors soit $b=0$ et $a=\pm 1=-d$ et donc $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix}$ où $c \in \mathbb{R}$ ou $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$ où $c \in \mathbb{R}$ soit $b \neq 0$ et $c = \frac{1-a^2}{b}$ $D = \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{1-a^2}{b} & -a \end{pmatrix}$ où a, b $\in \mathbb{R}$ **Cas n°2 :** Si $a+d \neq 0$ alors $b=0$ et $c=0$ et donc $a=\pm 1=d$ D'où $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ou $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et ces deux cas sont déjà inclus dans le cas n°1. ou $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$ ou $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 5.

Dans le cadre d'une étude sur les interactions sociales entre des souris, des chercheurs enferment des souris de laboratoire dans une cage comportant deux compartiments A et B.

La porte entre ces compartiments est ouverte pendant dix minutes tous les jours à midi.

On étudie la répartition des souris dans les deux compartiments.

On estime que chaque jour :

— 20 % des souris présentes dans le compartiment A avant l'ouverture de la porte se trouvent dans le compartiment B après fermeture de la porte,

— 10 % des souris qui étaient dans le compartiment B avant l'ouverture de la porte se trouvent dans le compartiment A après fermeture de la porte.

On suppose qu'au départ, les deux compartiments A et B contiennent le même effectif de souris.

On pose $a_0 = 0{,}5$ et $b_0 = 0{,}5$.

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note a_n et b_n les proportions de souris présentes respectivement dans les compartiments A et B au bout de n jours, après fermeture de la porte. On désigne par U_n la matrice $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

▶ 1. Soit n un entier naturel.

a. Justifier que $U_1 = \begin{pmatrix} 0{,}45 \\ 0{,}55 \end{pmatrix}$.

b. Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

c. En déduire que $U_{n+1} = MU_n$ où M est une matrice carrée que l'on précisera.

d. Démontrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $U_n = M^n U_0$.

e. Déterminer la répartition des souris dans les compartiments A et B au bout de 3 jours.

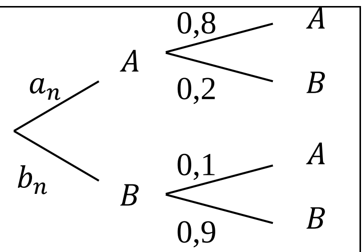
▶ 2. Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

a. Calculer à la main P^2. En déduire que P est inversible et calculer P^{-1}.

b. Vérifier que $P^{-1}MP$ est une matrice diagonale D que l'on précisera.

c. Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $M^n = PD^nP^{-1}$. En déduire M^n.

▶ 3. En s'aidant des questions précédentes, que peut-on dire de la répartition à long terme des souris dans les compartiments A et B de la cage ?

<table>
<tr>
<td rowspan="5">1</td>
<td>$a_1 = 0{,}5 \times 0{,}8 + 0{,}5 \times 0{,}1 = 0{,}45$ et donc $b_1 = 0{,}55$.
Donc $U_1 = \begin{pmatrix} 0{,}45 \\ 0{,}55 \end{pmatrix}$</td>
<td rowspan="3">
</td>
</tr>
<tr>
<td>$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{n+1} = a_n - 0{,}2a_n + 0{,}1b_n = 0{,}8a_n + 0{,}1b_n$
$b_{n+1} = b_n + 0{,}2a_n - 0{,}1b_n = 0{,}2a_n + 0{,}9b_n$</td>
</tr>
<tr>
<td>Soit $M = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}9 \end{pmatrix}$ alors
$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = U_{n+1}$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : $U_n = M^n U_0$,
démontrons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
Initialisation : pour $n = 1, U_1 = \begin{pmatrix} 0{,}45 \\ 0{,}55 \end{pmatrix}$
$M^1 U_0 = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}45 \\ 0{,}55 \end{pmatrix} = U_1$
donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie $i.e.\, U_n = M^n U_0$
$U_{n+1} = MU_n = M \times M^n U_0 = M^{n+1}\, U_O$
Par conséquent, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
On a donc démontré que, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(n)$ est vraie c'est à dire $U_n = M^n U_0$.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">$U_3 = M^3 U_0 = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}9 \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}562 & 0{,}219 \\ 0{,}438 & 0{,}781 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}3905 \\ 0{,}6095 \end{pmatrix}$
La répartition au bout de 3 jours est : 0,3905 dans le compartiment A et 0,6095 dans le compartiment B.</td>
</tr>
</table>

2	$P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 1-1 \\ 2-2 & 2-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $\frac{1}{3}P\,P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc P est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{3}P$
	$P^{-1}MP = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}7 \end{pmatrix} = D$
	Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : $M^n = PD^nP^{-1}$, démontrons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Initialisation : pour $n = 1, P^{-1}MP = D \Leftrightarrow M = PDP^{-1}$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie. Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie $i.e.\, M^n = PD^nP^{-1}$ $M^{n+1} = M^nM = PD^nP^{-1}M = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$ Par conséquent, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On a donc démontré que, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(n)$ est vraie c'est à dire $M^n = PD^nP^{-1}$. $M^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}7^n \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0{,}7^n \\ 2 & -0{,}7^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ $M^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2\times 0{,}7^n & 1-0{,}7^n \\ 2-2\times 0{,}7^n & 2+0{,}7^n \end{pmatrix}$
3	$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ U_n = M^nU_0 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2\times 0{,}7^n & 1-0{,}7^n \\ 2-2\times 0{,}7^n & 2+0{,}7^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$ $= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1+2\times 0{,}7^n & 1-0{,}7^n \\ 2-2\times 0{,}7^n & 2+0{,}7^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+2\times 0{,}7^n}{6} + \frac{1-0{,}7^n}{6} \\ \frac{2-2\times 0{,}7^n}{6} + \frac{2+0{,}7^n}{6} \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} \frac{2+0{,}7^n}{6} \\ \frac{4-0{,}7^n}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\times 0{,}7^n \\ \frac{2}{3} - \frac{1}{6}\times 0{,}7^n \end{pmatrix}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{3}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \frac{2}{3}$ puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}7^n = 0$ A long terme, la répartition des souris s'approchera de 1/3 dans le compartiment A et de 2/3 dans le compartiment B.

Exercice 6.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.

▶1. Vérifier que $A^2 = A + 2I_2$.

▶2. En déduire une expression de A^3 et une expression de A^4 sous la forme $\alpha A + \beta I_2$ où α et β sont des réels.

▶3. On considère les suites (r_n) et (s_n) définies par $r_0 = 0$ et $s_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$\begin{cases} r_{n+1} = r_n + s_n \\ s_{n+1} = 2\,r_n \end{cases}$$

Démontrer que, pour tout entier naturel n, $A^n = r_n\,A + s_n\,I$.

▶4. Démontrer que la suite (k_n) définie pour tout entier naturel n par $k_n = r_n - s_n$ est géométrique de raison −1. En déduire, pour tout entier naturel n, une expression explicite de k_n en fonction de n.

▶5. On admet que la suite (t_n) définie pour tout entier naturel n par $t_n = r_n + \frac{(-1)^n}{3}$ est géométrique de raison 2. En déduire, pour tout entier naturel n, une expression explicite de t_n en fonction de n.

▶6. Déduire des questions précédentes, pour tout entier naturel n, une expression explicite de r_n et s_n en fonction de n.

▶7. En déduire alors, pour tout entier naturel n, une expression des coefficients de la matrice A^n.

1. $A^2 = \begin{pmatrix}-4 & 6\\-3 & 5\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-4 & 6\\-3 & 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}16-18 & -24+30\\12-15 & -18+25\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2 & 6\\-3 & 7\end{pmatrix}$.

   $A+2I = \begin{pmatrix}-4+2 & 6\\-3 & 5+2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2 & 6\\-3 & 7\end{pmatrix} = A^2$.

2. En partant de l'égalité $A^2 = A+2I$, on obtient en multipliant chaque membre par A :
   $A^3 = A(A+2I) = A^2+2A = A+2I+2A = 3A+2I$ et on recommence :
   $A^4 = A\times A^3 = A(3A+2I) = 3A^2+2A = 3(A+2I)+2A = 5A+6I$.

3. Démonstration par récurrence :
   Initialisation : Pour $n=0$, $A^0 = I = 0A+1I = r_0A+s_0I$. la relation est vraie au rang 0.
   Hérédité : Supposons qu'il existe un naturel p non nul, tel que $A^p = r_pA+s_pI$.
   En multipliant chaque membre par A, on obtient :
   $A\times A^p = A\left(r_pA+s_pI\right) \iff A^{p+1} = r_pA^2+s_pA = r_p(A+2I)+s_pA =$
   $\left(r_p+s_p\right)A+2r_pI = r_{p+1}A+s_{p+1}I$: la relation est donc vraie au rang $p+1$.
   On a donc démontré par récurrence que, pour tout entier naturel n,
   $A^n = r_nA+s_nI$.

4. On a pour tout entier naturel n :
   $k_{n+1} = r_{n+1}-s_{n+1} = r_n+s_n-2r_n = s_n-r_n = -(r_n-s_n) = -k_n$.
   L'égalité $k_{n+1} = -k_n$ montre que la suite (k_n) est géométrique de raison -1.
   On sait qu'alors $k_n = k_0(-1)^n = -(-1)^n = (-1)^{n+1}$.

5. On a donc $t_1 = r_1 + \dfrac{(-1)^1}{3} = 1-\dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$.

   On sait qu'alors $t_n = \dfrac{2}{3}\times 2^{n-1}$

6. On a donc $r_n = t_n - \dfrac{(-1)^n}{3} = \dfrac{2}{3}\times 2^{n-1} - \dfrac{(-1)^n}{3}$.

   Or $s_n = r_n - k_n$, donc

   $s_n = \dfrac{2}{3}\times 2^{n-1} - \dfrac{(-1)^n}{3} - (-1)^{n+1} = \dfrac{2}{3}\times 2^{n-1} - \dfrac{(-1)^n}{3} + (-1)^n =$

   $s_n = \dfrac{2}{3}\times 2^{n-1} + \dfrac{2}{3}\times(-1)^n$.

7. Finalement de $A^n = r_nA+s_nI = \begin{pmatrix}-4r_n & 6r_n\\-3r_n & 5r_n\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}s_n & 0\\0 & s_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4r_n+s_n & 6r_n\\-3r_n & 5r_n+s_n\end{pmatrix}$, on en déduit les quatre coefficients de A^n.

   - $-4r_n+s_n = -\dfrac{8}{3}2^{n-1} + \dfrac{4}{3}\times(-1)^n + \dfrac{2}{3}2^{n-1} + \dfrac{2}{3}\times(-1)^n = -2^n + 2\times(-1)^n$;
   - $6r_n = 2^{n+1} - 2\times(-1)^n$;
   - $-3r_n = -2^n + (-1)^n$;
   - $5r_n+s_n = \dfrac{10}{3}2^{n-1} - \dfrac{5}{3}\times(-1)^n + \dfrac{2}{3}2^{n-1} + \dfrac{2}{3}\times(-1)^n = 2^{n+1} - (-1)^n$.

   Conclusion : $A^n = \begin{pmatrix}-2^n+2\times(-1)^n & 2^{n+1}-2\times(-1)^n\\-2^n+(-1)^n & 2^{n+1}-(-1)^n\end{pmatrix}$.