Fiche n°16 : Les puissances de matrices …
Maths Expertes

Exercice 1.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & t \end{pmatrix}$ où $t \in \mathbb{R}^*$.

▶ 1. Pour quelle(s) valeurs de t, la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & t-1 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

▶ 2. Pour tout $t \in \mathbb{R}^*, t \neq 1$

a) Donner l'inverse de P, calculer $D = P^{-1}AP$ et en déduire D^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
b) Démontrer par récurrence que, pour tout $\in \mathbb{N}$, $D^n = P^{-1}A^nP$.
c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n.

Exercice 2.

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$.

▶ 1. Pour tout entier n, on pose $U_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n$.
b) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = A^nU_0$.

▶ 2 a) La matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? si oui, donner son inverse.

b) On pose $D = P^{-1}AP$, démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n = P^{-1}A^nP$.
c) Calculer $D = P^{-1}AP$, en déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, D^n puis A^n.

▶ 3. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, U_n puis u_n. La suite (u_n) est-elle convergente ?

Exercice 3.

Dans un pays de population constante égale à 120 millions, les habitants vivent soit en zone rurale, soit en ville. Les mouvements de population sont modélisés ainsi :

- en 2010, la population compte 90 millions de ruraux et 30 millions de citadins ;
- chaque année, 10% des ruraux émigrent à la ville ;
- chaque année, 5% des citadins émigrent en zone rurale.

Pour tout entier naturel n, on note R_n l'effectif de la population rurale, exprimé en millions d'habitants, en l'année $2010 + n$, C_n l'effectif de la population citadine, exprimé en millions d'habitants, en l'année $2010 + n$. On a donc $R_0 = 90$ et $C_0 = 30$.

▶ 1. Pour tout entier naturel n, on considère la matrice $U_n = \begin{pmatrix} R_n \\ C_n \end{pmatrix}$.

a. Déterminer la matrice M telle que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = M \times U_n$.

b. Vérifier que $U_1 = \begin{pmatrix} 82{,}5 \\ 37{,}5 \end{pmatrix}$. En déduire le nombre de ruraux et de citadins en 2011.

▶ 2. Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. La matrice P est-elle inversible ? Si oui, donner P^{-1}.

▶ 3. a. On pose $D = P^{-1}MP$. Calculer D.

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, $M^n = PD^nP^{-1}$.

▶ 4. a. Calculer alors, pour tout entier naturel n non nul, M^n.

b. On admet que, pour tout entier naturel n non nul, $U_n = M^nU_0$. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $R_n = 50 \times 0{,}85^n + 40$ et déterminer l'expression de C_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite de R_n et de C_n lorsque n tend vers $+\infty$. Que peut-on en conclure pour la population étudiée ?