Fiche n°20 : Qu'est-ce qu'une équation diophantienne ?
Maths Expertes
Διόφαντος ὁ Ἀλεξανδρεύς

Exercice 1.

On considère l'équation diophantienne suivante d'inconnues x et y entiers relatifs $7x - 3y = 1$ (E)

```
for x in range(...
    for .........
        if .........
            print(x,y)
```

▶1. Compléter l'algorithme ci-dessus de manière à ce qu'il donne les solutions entières $(x; y)$ de l'équation (E) vérifiant $-5 \leq x \leq 10$ et $-5 \leq y \leq 10$.

▶2. a. Justifier l'existence d'une solution particulière de l'équation (E).

b. Donner une solution particulière $(x_0; y_0)$ de l'équation (E).

c. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

d. Déterminer l'ensemble des couples $(x; y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation (E) tels que $-5 \leq x \leq 10$ et $-5 \leq y \leq 10$.

Exercice 2. Vrai ou Faux ?

▶1. On considère l'équation (E) $3x - 2y = 1$, où x et y sont des entiers relatifs.
Affirmation : les solutions de l'équation (E) sont les couples $(9 + 2k; 13 + 3k)$, avec k appartenant à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.

▶2. **Affirmation :** S'il existe un couple de nombres entiers relatifs $(u; v)$ tel que $ua + vb = 3$, alors $PGCD(a; b) = 3$.

▶3. Soit $n \in \mathbb{N}$, on considère les deux entiers a et b tels que $a = 3n + 1$ et $b = 2n + 3$.
Affirmation : le PGCD de a et b est égal à 7 si et seulement si n est congru à 2 modulo 7.

Exercice 3.

Partie A : Soient p et q deux entiers naturels premiers entre eux et a est un entier relatif, démontrer que, si $a \equiv 0\ [p]$ et $a \equiv 0\ [q]$ alors $a \equiv 0\ [pq]$.

Partie B : On se propose de déterminer l'ensemble $\mathcal{J}$ des entiers relatifs n vérifiant le système $\begin{cases} n \equiv 9\ [17] \\ n \equiv 3\ [5] \end{cases}$

▶1. a) Justifier l'existence d'un couple d'entiers relatifs tel que $17u + 5v = 1$.

b) On pose $n_0 = 3 \times 17u + 9 \times 5v$. Démontrer que n_0 appartient à $\mathcal{J}$.

c) Donner un exemple d'entier n_0 appartenant à $\mathcal{J}$.

▶2. a) Soit n un entier relatif appartenant à $\mathcal{J}$. Démontrer que $n - n_0 \equiv 0\ [85]$.

b) En déduire qu'un entier relatif n appartient à $\mathcal{S}$ si et seulement si il peut s'écrire sous la forme $n = 43 + 85k$ où k est un entier relatif.

▶3. Diophante d'Alexandrie sait qu'il a entre 300 et 400 jetons. S'il fait des tas de 17 jetons, il lui en reste 9. S'il fait des tas de 5 jetons, il lui en reste 3.

Combien a-t-il de jetons ?