Fiche n°21 : Les nombres de Mersenne
Maths Expertes

Marin Mersenne

Les nombres de Mersenne doivent leur nom au religieux érudit et mathématicien français du XVIIe siècle Marin Mersenne ; mais, près de 2 000 ans auparavant, Euclide les utilisait déjà pour étudier les *nombres parfaits* (*ce sont des entiers naturels égaux à la moitié de la somme de leurs diviseurs*).

Nombres de Mersenne

Pour tout entier naturel $k > 2$, on pose $M_k = 2^k - 1$.

On dit que M_k est le k^e **nombre de Mersenne**.

Partie A : Conjecture

▶1. Reproduire et compléter le tableau suivant, qui donne quelques valeurs de M_k :

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10
M_k									

▶2. Si k est un nombre premier, peut-on conjecturer que le nombre M_k est premier ?

Partie B : Exemples du 33ᵉ et du 7ᵉ ...

▶1. On désigne par a, b et c trois entiers naturels non nuls tels que $PGCD(b;c) = 1$. Prouver que si b divise a et c divise a alors le produit bc divise a.

▶2. On considère le nombre de Mersenne $2^{33} - 1$. Un élève utilise sa calculatrice et obtient les résultats ci-contre. Il affirme que 3 divise $(2^{33} - 1)$ et 4 divise $(2^{33} - 1)$ et 12 ne divise pas $(2^{33} - 1)$.

$(2^{33} - 1)/3$
2863311530
$(2^{33} - 1)/4$
2147483648
$(2^{33} - 1)/12$
715827882,6

a. En quoi cette affirmation contredit-elle le résultat démontré à la question 1 ?

b. Justifier que, en réalité, 4 ne divise pas $(2^{33} - 1)$.

c. En remarquant que $2 \equiv -1\ [3]$, montrer que, en réalité, 3 ne divise pas $(2^{33} - 1)$.

d. Calculer la somme $S = 1 + 2^3 + (2^3)^2 + (2^3)^3 + \cdots + +(2^3)^{10}$.

e. En déduire que 7 divise $(2^{33} - 1)$.

▶3. On considère le nombre de Mersenne $2^7 - 1$. Est-il premier ? Justifier.

Partie C : Démonstrations ...

▶1. Soient p et q deux entiers naturels non nuls.

a. Justifier l'égalité $1 + 2^p + (2^p)^2 + (2^p)^3 + \cdots + (2^p)^{q-1} = \frac{(2^p)^q - 1}{2^p - 1}$.

b. En déduire que $2^{pq} - 1$ est divisible par $2^p - 1$.

c. En déduire que si un entier k supérieur ou égal à 2 n'est pas premier, alors M_k ne l'est pas non plus.

▶2. Prouver que le nombre de Mersenne M_{11} n'est pas premier. Que peut-on en déduire concernant la conjecture de la partie A ?