Fiche n°22 : L'exponentielle complexe
Maths Expertes

Exercice 1.

Soit la fonction à valeurs complexes $f : \begin{array}{c} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ \theta \longmapsto \cos(\theta) + i\sin(\theta) \end{array}$

▶1. Démontrer que, $\forall\theta \in \mathbb{R}$ et $\forall\theta' \in \mathbb{R}$, $f(\theta) \times f(\theta') = f(\theta + \theta')$.

▶2. Démontrer que, $\forall\theta \in \mathbb{R}$, $f'(\theta) = if(\theta)$.

▶3. Déterminer une autre fonction vérifiant ces propriétés.

Exercice 2.

▶1. Etablir l'**identité d'Euler**, qualifiée de « *formule la plus remarquable des mathématiques* » par le physicien américain Richard Feynman (1918-1988) qui était l'un des plus influents de la seconde moitié du XXe siècle.

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = \qquad}$$

▶2. Déterminer les nombres suivants :

$$A = e^{i0} \qquad B = e^{\frac{i\pi}{2}} \qquad D = 2e^{\frac{-2i\pi}{3}} \qquad E = 8\,e^{\frac{-5i\pi}{6}}$$

Exercice 3.

▶1. $\forall\theta \in \mathbb{R}$, déterminer le module et un argument de $e^{i\theta}$.

▶2. $\forall\theta \in \mathbb{R}, \forall\rho \in \mathbb{R}$, déterminer le module et un argument de $\rho e^{i\theta}$.

Définition :
$z = \rho e^{i\theta}$ s'appelle la notation exponentielle du nombre complexe z.

▶3a) $\forall\theta \in \mathbb{R}$, déterminer la forme algébrique de $\frac{1}{e^{i\theta}}$.

b) $\forall\theta \in \mathbb{R}$, déterminer la forme algébrique de $e^{-i\theta}$.

▶4. $\forall\theta \in \mathbb{R}$, exprimer $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ en fonction de $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$.

Exercice 4.

On considère nombres complexes :

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{i}{4} \quad \text{et} \quad z_2 = i\sqrt{3} - 1$$

▶1. Ecrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

▶2. En déduire la forme exponentielle de $z_1 \times z_2$ et $\frac{z_2}{z_1}$.

▶3. Déterminer les formes exponentielles de $\overline{z_1}$ et $\overline{z_2}$.