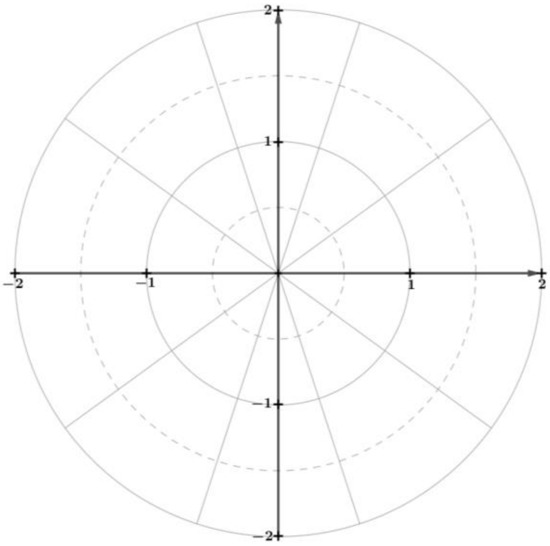
Fiche n°24 : Les racines cinquièmes de l'unité
Maths Expertes

Euclide a fondé sa géométrie sur un système d'axiomes qui assure, en particulier, qu'il est toujours possible de tracer une droite passant par deux points donnés et qu'il est toujours possible de tracer un cercle de centre donné et passant par un point donné. *La géométrie euclidienne est donc la géométrie des droites et des cercles, donc de la règle non graduée et du compas.*



▶ 1 a) Résoudre l'équation $z^5 = 1$ dans $\mathbb{C}$.

Les solutions de cette équation s'appellent les racines 5e de l'unité.

b) Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$, placer les racines cinquièmes de l'unité.

▶ 2. Calculer la somme :

$$S = 1 + e^{2i\frac{\pi}{5}} + e^{4i\frac{\pi}{5}} + e^{6i\frac{\pi}{5}} + e^{8i\frac{\pi}{5}}$$

▶ 3. Notons $\omega = e^{2i\frac{\pi}{5}}$, $P = \omega + \omega^4$ et $Q = \omega^2 + \omega^3$.

a) Calculer ω^6 puis ω^7. En déduire $P + Q$ et $P \times Q$.

b) Déterminer alors P et Q.

c) Calculer ω^4 puis ω^3. A l'aide des formules d'Euler, en déduire $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

d) Déterminer alors $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

e) En déduire la forme algébrique des racines cinquièmes de l'unité.

▶ 4 a) Etablir la formule de $\cos(2a)$ en fonction de $\cos(a)$.

b) En déduire $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ puis $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

c) Déterminer le périmètre du pentagone régulier inscrit dans un cercle de rayon 1.

▶ 5. Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$, notons A et B les points d'affixes respectives ω et $\overline{\omega}$. Le point H est l'intersection de (AB) avec l'axe $(O\,;\vec{u})$. Le cercle dont le centre I a pour affixe $z_I = -\frac{1}{2}$ et qui passe par le point d'affixe i coupe l'axe $(O\,;\vec{u})$ en deux points M et N (on note M le point d'abscisse positive).

a) Démontrer que le point H est le milieu de $[OM]$.

b) Construire, sur feuille blanche, à la règle non graduée et au compas, le pentagone régulier.