Parcours sur un graphe – Puissance de matrice

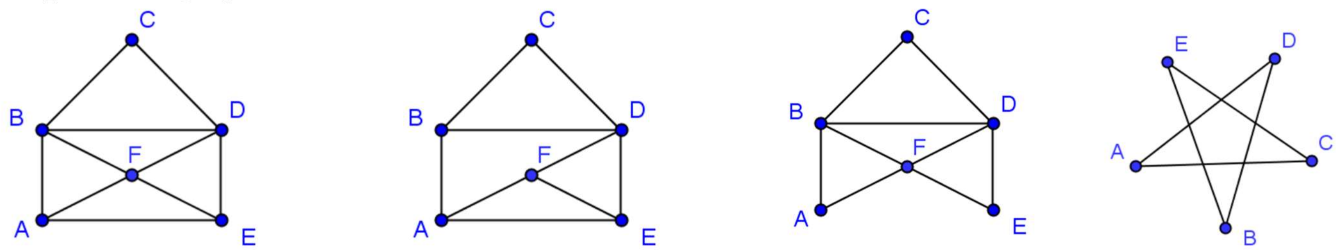
1. Les ponts du Königsberg

La ville de Königsberg (aujourd'hui Kaliningrad) est construite autour de deux îles situées sur le Pregel et reliées entre elles par un pont. Six autres ponts relient les rives de la rivière à l'une ou l'autre des deux îles, comme représentés sur le plan ci-dessus. Le problème consiste à déterminer s'il existe ou non une promenade dans les rues de Königsberg permettant, à partir d'un point de départ au choix, de passer une et une seule fois par chaque pont, et de revenir à son point de départ, étant entendu qu'on ne peut traverser le Pregel qu'en passant sur les ponts.

(https://fr.wikipedia.org/wiki/Problème_des_sept_ponts_de_Königsberg)

En théorie des graphes, on dit d'un graphe non-orienté qu'il est « eulérien » lorsque l'on peut le parcourir en partant d'un sommet quelconque et en empruntant exactement une fois chaque arête pour revenir au sommet de départ, il admet donc un **cycle eulérien.** Un tel graphe a alors la propriété qu'il correspond à un dessin qu'on peut tracer sans lever le crayon.

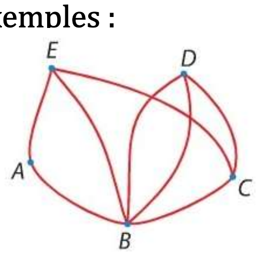
Exemples : Les graphes ci-dessous sont-ils eulériens ?



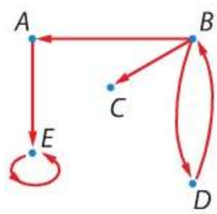
2. Matrice d'adjacence associée à un graphe

La **matrice d'adjacence associée à un graphe à n sommets** est la matrice carrée A à n lignes et n colonnes où chaque élément a_{ij} est égal au nombre d'arêtes reliant les sommets i et j.

Exemples :



$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . \\ 1 & . & . & . & . \end{pmatrix} \end{array}$$



$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . \end{pmatrix} \end{array}$$

Théorème :

Soit A la matrice d'adjacente d'un graphe, la matrice $A^p = A \times A \times \ldots \times A$ s'appelle la **matrice puissance p-ième.** L'élément p_{ij} de la matrice A^p est égal au nombre de **chaînes de longueur p** reliant le sommet i au sommet j.

Exemple : Déterminer le nombre de chaînes de longueur 5 reliant les sommets B et E.