Andreï A. Markov
Андрей Андреевич Марков

Exercice 1.

Dans le cadre d'une étude sur les interactions sociales entre des souris, des chercheurs enferment des souris de laboratoire dans une cage comportant deux compartiments A et B.
La porte entre ces compartiments est ouverte pendant dix minutes tous les jours à midi.
On étudie la répartition des souris dans les deux compartiments.
On estime que chaque jour :

— 20 % des souris présentes dans le compartiment A avant l'ouverture de la porte se trouvent dans le compartiment B après fermeture de la porte,

— 10 % des souris qui étaient dans le compartiment B avant l'ouverture de la porte se trouvent dans le compartiment A après fermeture de la porte.

On suppose qu'au départ, les deux compartiments A et B contiennent le même effectif de souris.
On pose $a_0 = 0{,}5$ et $b_0 = 0{,}5$.
Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note a_n et b_n les proportions de souris présentes respectivement dans les compartiments A et B au bout de n jours, après fermeture de la porte. On désigne par U_n la matrice $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

▶ 1. Soit n un entier naturel.

a. Justifier que $U_1 = \begin{pmatrix} 0{,}45 \\ 0{,}55 \end{pmatrix}$.
b. Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
c. En déduire que $U_{n+1} = MU_n$ où M est une matrice carrée que l'on précisera.
d. Démontrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $U_n = M^n U_0$.
e. Déterminer la répartition des souris dans les compartiments A et B au bout de 3 jours.

▶ 2. Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

a. Calculer à la main P^2. En déduire que P est inversible et calculer P^{-1}.
b. Vérifier que $P^{-1}MP$ est une matrice diagonale D que l'on précisera.
c. Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $M^n = PD^nP^{-1}$. En déduire M^n.

▶ 3. En s'aidant des questions précédentes, que peut-on dire de la répartition à long terme des souris dans les compartiments A et B de la cage ?

Exercice 2.

On observe la taille d'une colonie de fourmis tous les jours.
Pour tout entier naturel n non nul, on note u_n le nombre de fourmis, exprimé en milliers, dans cette population au bout du n-ième jour.
Au début de l'étude la colonie compte 5 000 fourmis et au bout d'un jour elle compte 5 100 fourmis. Ainsi, on a $u_0 = 5$ et $u_1 = 5{,}1$.
On suppose que l'accroissement de la taille de la colonie d'un jour sur l'autre diminue de 10 % chaque jour.
En d'autres termes, pour tout entier naturel n, $u_{n+2} - u_{n+1} = 0{,}9(u_{n+1} - u_n)$.

▶ 1. Démontrer, dans ces conditions, que $u_2 = 5{,}19$.

▶ 2. Pour tout entier naturel n, on pose $V_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1{,}9 & -0{,}9 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $V_{n+1} = A\,V_n$.
b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $V_n = A^n V_0$.
c) On pose $P = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Démontrer que la matrice P est inversible.
Déterminer alors la matrice P^{-1}.
En détaillant les calculs, déterminer la matrice D définie par $D = P^{-1}AP$.
d) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $A^n = PD^nP^{-1}$.
Pour tout entier naturel n, déterminer alors A^n.
e) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 6 - 0{,}9^n$.

▶ 3. Calculer la taille de la colonie au bout du 10e jour. On arrondira le résultat à une fourmi près.

▶ 4. Calculer la limite de la suite (u_n). Interpréter ce résultat dans le contexte.

Exercice 3. Marche aléatoire

Une puce parcourt les côtés d'un carré ABCD en partant du sommet A et met une seconde pour parcourir un côté. Arrivée à un sommet, elle choisit au hasard l'un ou l'autre des deux côtés issus de ce sommet pour poursuivre sa marche.

▶ 1. Représenter la situation par un graphe probabiliste.

▶ 2. Écrire la matrice de transition M associée à ce graphe.

▶ 3. En déduire la probabilité que la puce soit en A au bout de 15 secondes.

▶ 4. Et si $ABCD$ est un tétraèdre régulier ?